करूया मैत्री गणिताशी

कार्यपुस्तिका

इयत्ता : नववी

'STARS' प्रकल्पांतर्गत

राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.

करूया मैत्री गणिताशी : कार्यपुस्तिका : इयत्ता नववी

- **प्रवर्तक** : शालेय शिक्षण व क्रीडा विभाग, महाराष्ट्र शासन
- **प्रकाशक** : राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
- **प्रेरणा** : **मा. रणजितसिंह देओल (भा.प्र.से.)**
  प्रधान सचिव, शालेय शिक्षण व क्रीडा विभाग, महाराष्ट्र राज्य.
- **मार्गदर्शन** : **मा. सूरज मांढरे (भा.प्र.से.)**
  आयुक्त (शिक्षण), महाराष्ट्र राज्य, पुणे.
  : **मा. कैलास पगारे (भा.प्र.से.)**
  राज्य प्रकल्प संचालक,
  महाराष्ट्र प्राथमिक शिक्षण परिषद, मुंबई.
- **संपादक** : **मा. कौस्तुभ दिवेगावकर (भा.प्र.से.)**
  संचालक,
  राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
- **सहसंपादक** : **मा. रमाकांत काठमोरे**
  सहसंचालक,
  राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
- **कार्यकारी संपादक** : **डॉ. कमलादेवी आवटे**
  उपसंचालक, भाषा व समन्वय विभाग,
  राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
- **कार्यकारी सहसंपादक** : **रत्नप्रभा भालेराव**
  वरिष्ठ अधिव्याख्याता, गणित विभाग,
  राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
  : **वृषाली गायकवाड**
  अधिव्याख्याता, गणित विभाग,
  राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
- **प्रथम आवृत्ती** : जानेवारी २०२३
- **अर्थसाहाय्य** : ‘STARS’ प्रकल्पांतर्गत, महाराष्ट्र प्राथमिक शिक्षण परिषद, मुंबई.
- **मुद्रक** : रुना ग्राफिक्स, पुणे.

- © सर्व हक्क प्रकाशकाच्या स्वाधीन.

करूया मैत्री गणिताशी

कार्यपुस्तिका

इयत्ता : नववी

'STARS' प्रकल्पांतर्गत

नाव : ______________________

शाळा : ______________________

इयत्ता : ____________ तुकडी : ____________

ज्ञानसेवा तु साफल्यम्

राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.

अनुक्रमणिका

भाग – 1		
1.	संच	1
2.	वास्तव संख्या	7
3.	बहुपदी	12
4.	गुणोत्तर व प्रमाण	15
5.	दोन चलांतील रेषीय समीकरणे	20
6.	अर्थनियोजन	28
7.	सांख्यिकी	35
भाग – 2		
1.	भूमितीतील मूलभूत संबोध	42
2.	समांतर रेषा	47
3.	त्रिकोण	52
4.	त्रिकोण रचना	63
5.	चौकोन	66
6.	वर्तुळ	74
7.	निर्देशक भूमिती	78
8.	त्रिकोणमिती	86
9.	पृष्ठफळ आणि घनफळ	91

भाग – 1

1 संच

1) खाली दिलेले समूह, संच आहेत किंवा नाहीत ते खालील चौकटींमध्ये लिहा.

महाराष्ट्रातील नद्या	वर्गातील मितभाषी मुले	सर्व ऋण पूर्णांक संख्या

2) खाली दिलेल्या अटी पूर्ण करणाऱ्या उकलींचा 'L' हा संच यादी पद्धतीने लिहा.

$m - n = 6$; $m, n \in W$; $n < 4$

L = { (7, [1]), (6, [0]), ([8] , 2), ([ ] , [ ]) }

3) खालीलपैकी कोणते संच समान आहेत हे ठरविण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

N = हा नैसर्गिक संख्यांचा संच आहे. A = $\{ x \mid x = 2n + 1, n \in W \}$

W = हा पूर्ण संख्यांचा संच आहे. B = हा शून्येतर पूर्ण संख्यांचा संच

उकल : N = { 1, 2, [ ] , [ ] , ... }

W = { [ ] , [ ] , [ ] , [ ] , ... }

संच A यादी पद्धतीने लिहू.

$n = 0$ घेऊ $\therefore x = 2n + 1 = 0 + 1 =$ [1]

$n = 1$ घेऊ $\therefore x = 2n + 1 = 2 \times$ [ ] $+ 1 =$ [3]

$n = 2, n = 3$ घेऊन x च्या किमती काढा व संच पूर्ण करा.

A = { [ ] , [ ] , [ ] , [ ] , ...}

B हा शून्येतर पूर्ण संख्यांचा संच आहे.

$\therefore$ B = { 1, 2, 3, ...}

$\therefore$ संच [ ] व संच [ ] समान संच आहेत.

कारण दोन्ही संचाचे घटक [ ] आहेत.

4) **खालीलपैकी कोणते संच सांत, अनंत, रिक्त किंवा एकघटक संच आहेत हे ओळखण्यासाठी सारणी पूर्ण करा.**

अ. क्र.	संच	यादी पद्धत	संचाचा प्रकार	कारण
1.	$A = \{x \mid x \in W, 8 < x < 9\}$			
2.	$B = \{m \mid m = 2y - 1, y \in N\}$			
3.	$C = \{x \mid x \in I, -2 \le x \le 3\}$			
4.	$D = \{x \mid x \in W, x < 1\}$			

5) **खाली दिलेली सारणी पूर्ण करा.**

अ. क्र.	यादी पद्धत	गुणधर्म पद्धत
1.	$A = \{3, 3^2, 3^3, 3^4\}$	$A = \{x \mid x = 3^n, n \in \square, n \le \square\}$
2.	$B = \{\square\}$	$B = \{y \mid y$ हा ग्रेगरियन वर्षातील 30 किंवा 31 दिवसांचा महिना नाही.$\}$
3.	$P = \{\square\}$	$P = \{x \mid x$ हे AHMEDNAGAR या शब्दांतील अक्षर आहे.$\}$

6) **खाली प्रत्येक उदाहरणासाठी संच A व B दिले आहेत, त्यावरून दिलेली कृती पूर्ण करा.**

i) $A = \{0, 1, 3, 5, 6\}$ $\therefore n(A) = \square$

$B = \{6, 8, 10, 12\}$ $\therefore n(B) = \square$

$A \cup B = \{\square\}$

$\therefore n(A \cup B) = \square$

$A \cap B = \{\square\}$ $\therefore n(A \cap B) = \square$

ii) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$

$\therefore n(A) = \square$, $n(B) = \square$

$A \cup B = \{ \square \}$ $\therefore n(A \cup B) = \square$

$A \cap B = \{ \square \}$ $\therefore n(A \cap B) = \square$

iii) $A = \{ 13, 17, 19, 21 \}$, $B = \{ 15, 20, 25 \}$

$\therefore n(A) = \square$, $n(B) = \square$

$A \cup B = \{ \square \}$ $\therefore n(A \cup B) = \square$

$A \cap B = \{ \square \}$ $\therefore n(A \cap B) = \square$

iv) $A = \{ 100, 101, 102, 103 \}$, $B = \{ \quad \}$

$n(A) = \square$, $n(B) = 0$

$A \cup B = \{ \square \}$ $\therefore n(A \cup B) = \square$

$A \cap B = \{ \square \}$ $\therefore n(A \cap B) = \square$

7) इयत्ता 9 वी मध्ये 175 विद्यार्थी आहेत. त्यामध्ये कलिंगड हे फळ आवडणारे 80 विद्यार्थी आहेत. 70 विद्यार्थ्यांना अननस हे फळ आवडते. कलिंगड व अननस ही दोन्ही फळे आवडणारे 30 विद्यार्थी आहेत, तर किती विद्यार्थ्यांना या दोन्हीपैकी एकही फळ आवडत नाही? किती विद्यार्थ्यांना फक्त कलिंगड हे फळ आवडते? हे शोधण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

पद्धत 1 : सूत्र वापरून

उकल : समजा, एकूण विद्यार्थ्यांचा संच म्हणजे विश्वसंच (∪) $\therefore n(\cup) = \square$

कलिंगड आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच A मानू $\therefore n(A) = \square$

अननस आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच B मानू $\therefore n(B) = \square$

कलिंगड व अननस ही दोन्ही फळे आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या = $\square$

$\therefore n(A \cap B) = \square$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ .... सूत्र

$= \square + \square - \square$

$= \square - \square = \square$

म्हणजे एकूण [ ] विद्यार्थ्यांपैकी कलिंगड किंवा अननस किंवा दोन्ही फळे आवडणारे 120 विद्यार्थी आहेत.

$\therefore$ कलिंगड व अननस न आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या = एकूण विद्यार्थी संख्या – $n(A \cup B)$

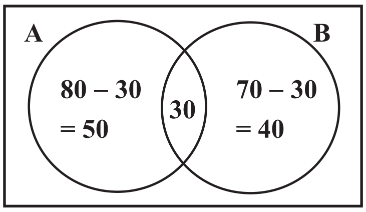
= [ ] – [ ]

= [ ]

फक्त कलिंगड आवडणारे विद्यार्थी = कलिंगड आवडणारे विद्यार्थी – दोन्ही फळे आवडणारे विद्यार्थी

= [ ] – [ ] = [ ]

पद्धत 2 : सूत्र व वेन आकृती वापरून



कलिंगड आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच A मानू $\therefore$ $n(A) = 80$

अननस आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच B मानू $\therefore$ $n(B) =$ [ ]

$\therefore$ कलिंगड व अननस ही दोन्ही फळे आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या = $n(A \cap B) =$ [ ]

$\therefore$ फक्त कलिंगड आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या

$= n(A) - n(A \cap B) =$ [ ] – [ ] = [ ]

$\therefore$ फक्त अननस आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या

$= n(B) - n(A \cap B) =$ [ ] – [ ] = [ ]

$\therefore$ दोन्ही फळे न आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या

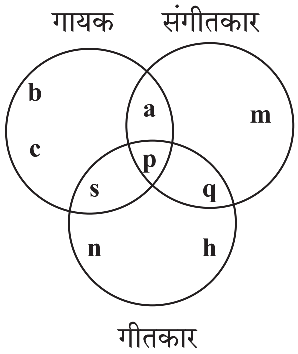
= एकूण विद्यार्थी – $n(A \cup B)$

= [ ] – (50 + 30 + 40)

= [ ] – [ ]

= [ ]

8) खाली दिलेल्या वेन आकृतीचे निरीक्षण करून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

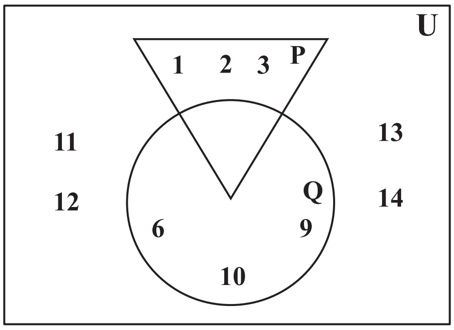


a) गायक असलेले संगीतकार कोणते आहेत?

b) संगीतकार आणि गायक आहेत, पण गीतकार नाहीत असे कोणते सदस्य आहेत?

c) असे कोणते सदस्य आहेत जे गायक किंवा गीतकार आहेत, पण संगीतकार नाहीत?

9) खाली दिलेल्या वेन आकृतीवरून पुढील संच लिहा.



i) U = { }

ii) P = { }

iii) Q = { }

iv) $P \cup Q$ = { }

v) $P \cap Q$ = { }

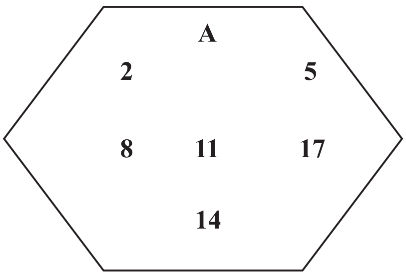
vi) P' = { }

vii) Q' = { }

viii) $P' \cap Q'$ = { }

ix) $(P \cup Q)'$ = { }

10) संच A चे कोणतेही 4 उपसंच लिहा.



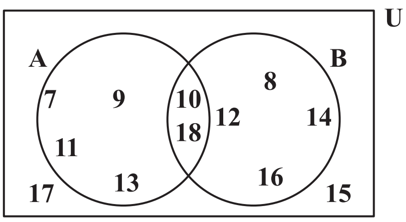
1)

2)

3)

4)

11) खाली दिलेल्या वेन आकृतीवरून पुढील संच लिहा.



1) U = { }

2) A = { }

3) B = { }

4) A' = {   }

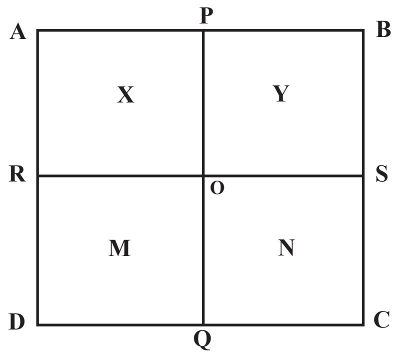
5) B' = {   }

6) $A' \cup B'$ = {   }

7) $A' \cap B'$ = {   }

8) $(A' \cap B')$ = {   }

12) खाली दिलेल्या आकृतीमध्ये, □ABCD चे रेख PQ व रेख RS मुळे X, Y, M, N या चार भागात विभाजन झाले आहे, त्यानुसार खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



i) $X \cap Y =$ ☐

ii) $Y \cap N =$ ☐

iii) $(X \cap Y) \cup (M \cap N) =$ ☐

iv) उपप्रश्न (i) व (ii) मध्ये मिळालेल्या संचाचा छेद संच = ☐

सरावासाठी उदाहरणे

1) गावातील 520 कुटुंबांपैकी 360 कुटुंबे पशुपालन आणि 280 कुटुंबे कुक्कुटपालन करतात. 180 कुटुंबे दोन्ही प्रकारचे व्यवसाय करतात, तर खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

i) किती कुटुंबे फक्त कुक्कुटपालनाचा व्यवसाय करतात?

ii) दोन्हीपैकी कोणताही व्यवसाय न करणारी किती कुटुंबे आहेत?

2) एका वसाहतीतील 56 व्यक्तींपैकी 16 व्यक्तींकडे फक्त मोटारसायकल आहे. 12 व्यक्तींकडे फक्त सायकल आहे. 20 व्यक्तींकडे मोटारसायकल आणि सायकल ही दोन्ही वाहने आहेत, तर किती व्यक्तींकडे मोटारसायकल किंवा सायकल यांपैकी एकही वाहन नाही?

3) एका वर्गामध्ये 60% विद्यार्थी इंग्रजी विषयात, तर 70% विद्यार्थी हिंदी या विषयात उत्तीर्ण आहेत. जर 180 विद्यार्थी दोन्ही विषयांत उत्तीर्ण असतील तर, त्या वर्गामध्ये एकूण किती विद्यार्थी आहेत?

2 वास्तव संख्या

1) **दिलेल्या सारणीत संख्यांचे वर्गीकरण करा.** $7,\ -6,\ 0,\ \sqrt[3]{19}\ ,\ 2.5,\ 1000,\ \sqrt{3},\ -\frac{3}{4}\ ,\ \sqrt[3]{64}$

संख्यांचा प्रकार	संख्या
1) नैसर्गिक संख्या	
2) पूर्ण संख्या	
3) पूर्णांक संख्या	
4) परिमेय संख्या	
5) अपरिमेय संख्या	

2) **खाली दिलेल्या संख्यांचे खंडित व अखंड आवर्ती दशांश रूपात वर्गीकरण करा.**

$\frac{14}{5}\ ,\ \frac{6}{11}\ ,\ \frac{29}{32}\ ,\ \frac{9}{20}$, 0. 8181......., 357.417417........, 3.625, $0.\overline{18}$, 0.6.

खंडित दशांश रूप → $\frac{14}{5}$, ☐ , ☐ , ☐ , ☐

अखंड आवर्ती दशांश रूप → $\frac{6}{11}$, ☐ , ☐ , ☐

3) **खाली दिलेल्या संख्यांचे परिमेय व अपरिमेय संख्या यांमध्ये वर्गीकरण करा.**

$\sqrt{7}$, –16, 27, –5, 100, $\sqrt{5}$, $\sqrt{4}$, 0. 35, $\frac{27}{3}$, 0.101001000...., π, $\sqrt[3]{8}$

परिमेय संख्या	अपरिमेय संख्या

4) **1. 262626... हा अखंड आवर्ती दशांश अपूर्णांक $\frac{p}{q}$ रूपात लिहिण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

समजा, $x = 1.2626 \ldots\ldots\ldots = 1.\overline{26}$

$\therefore\ 100x = \square = 126.\overline{26}$ .... (दोन्ही बाजूस 100 ने गुणून)

$\therefore\ 100x - x = \square - \square$

$\therefore\ 99x = \square$

$\frac{\square}{99}$

$\therefore\ 1.262626.... = \frac{\square}{\square}$

5) **$\sqrt{3}$ व $-\sqrt{3}$ या संख्या संख्यारेषेवर दाखवा.**

6) **$2 + \sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे हे सिद्ध करण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

$2 + \sqrt{2}$ ही परिमेय संख्या आहे. हे गृहीत धरू.

$\therefore\ 2 + \sqrt{2} = n$ .... $n \in Q$

$\therefore\ \sqrt{2} = n - \square$

येथे डावी बाजू $\square$ ही अपरिमेय संख्या व उजवी बाजू $\square$ ही परिमेय संख्या आहे;

परंतु ही विसंगती आहे.

त्यामुळे $2 + \sqrt{2}$ ही संख्या परिमेय आहे हे गृहीत धरणे चुकीचे आहे.

$\therefore\ 2 + \sqrt{2}$ ही संख्या $\square$ संख्या आहे हे सिद्ध होते.

(**टीप :** अशा प्रकारच्या सिद्धतेला ‘अप्रत्यक्ष सिद्धता’ म्हणतात.)

7) **$(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ ही अपरिमेय संख्या आहे हे सिद्ध करण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

समजा, $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ही परिमेय संख्या आहे.

$\therefore\ x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ $\qquad \therefore\ x^2 = (\qquad)^2$

$\therefore\ x^2 = \boxed{} - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + \boxed{}$

$\therefore\ x^2 = 5 - 2\sqrt{6}$ $\qquad \therefore\quad 2\sqrt{6} = 5 - x^2$

$\therefore\ \sqrt{6} = \dfrac{5 - x^2}{2}$ .... (I)

येथे $\sqrt{6}$ ही $\boxed{}$ संख्या आहे.

तसेच x ही परिमेय संख्या असल्याने $\dfrac{5 - x^2}{2}$ ही संख्या $\boxed{}$ आहे.

समीकरण (I) ची डावी बाजू $\boxed{}$ तर उजवी बाजू $\boxed{}$ अशी विसंगती मिळते.

$\therefore\ \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ही परिमेय संख्या समजणे चुकीचे आहे.

$\therefore\ \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

8) **खाली दिलेल्या सूचनेप्रमाणे कृती करून उत्तरे लिहा.**

अ.क्र.	सूचना		उत्तर
1)	करणींची कोटी लिहा.	i) $\sqrt[4]{5}$ ii) $\sqrt{\sqrt{3}}$	....
2)	परिमेयीकरण गुणक लिहा.	i) $\sqrt{24}$ ii) $\sqrt{45}$	....
3)	छेदाचे परिमेयीकरण करा.	i) $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ ii) $\dfrac{7}{\sqrt{2}}$	....

9) **सोपे रूप द्या.**

a) $2\sqrt{32} + \sqrt{98} - 5\sqrt{8}$

....

....

....

....

b) $\frac{1}{3}\sqrt{75} - \frac{2}{3}\sqrt{27} + \sqrt{48}$

....

....

....

....

10) **सोडवा.**

$|7x - 18| = 10$

$\therefore 7x - 10 = \pm 10$

$\therefore 7x - 18 = 10$ किंवा $7x - 18 = -10$

$\therefore 7x = 10 + \square$ किंवा $\therefore 7x = -10 + \square$

$\therefore 7x = \square$ किंवा $\therefore 7x = \square$

$\therefore x = \square$ किंवा $x = \square$

11) **गुणाकार करा.**

$\left(3\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\left(-4\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

12) छेदाचे परिमेयीकरण करा : $\frac{4}{7+4\sqrt{3}}$

सरावासाठी उदाहरणे

1) सिद्ध करा : $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

2) जर $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ तर $x^3 + \frac{1}{x^3}$ ची किंमत काढा.

3) जर $p = 7 - 4\sqrt{3}$ तर $\sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p}}$ ची किंमत काढा.

4) $\frac{p}{q}$ रूपात लिहा. 0.5292929.......

5) सोपे रूप द्या.

i) $\sqrt{75} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$

ii) $3\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{3}$

iii) $\sqrt{1000} + \sqrt{90}$

iv) $36\sqrt{54} \div 18\sqrt{6}$

6) छेदाचे परिमेयीकरण करा.

$\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

3 बहुपदी

1) खालील चौकटींमध्ये योग्य बहुपदी लिहा.

a) मी एका चलातील बहुपदी आहे : i) $5x^2 + 2$

ii) ☐

b) मी एका चलातील बहुपदी असून माझी कोटी 3 आहे. i) $7x^3 + 6x + 5$

ii) ☐

c) मी एक बहुपदी आहे. मला $2x$ ने भागले तर भागाकार $2x$ येतो व बाकी 0 येते तर मी कोण?

☐

d) दोन बहुपदींचा गुणाकार $12\,m^2n$ आहे तर, त्या दोन बहुपदी कोणत्या? ☐ व ☐

e)

$$\begin{array}{r|l} & \square \;\; -3 \\ \hline 2y+3 & 8y^2 + 6y + 4 \\ & \underset{-}{} 8y^2 \underset{+}{-} 12y \\ \hline & 0 - \square + 4 \\ & \underset{+}{-} 6y \;\; \underset{+}{-} \square \\ \hline & 0 + 13 \end{array}$$

2) $8m^2 + 7m^5 + 5 - 6m^3$ ही बहुपदी खाली दिलेल्या सूचनांप्रमाणे लिहा.

a) प्रमाणरूपात लिहा. ⟶ ☐

b) घातांकरूपात लिहा. ⟶ ☐

c) सहगुणकरूपात लिहा. ⟶ ☐

3) अवयव सिद्धांताचा उपयोग करून $(y-2)$ हा $y^4 - 3y^2 - 3y + 3$ चा अवयव आहे की नाही ते ठरविण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

$p(y) = y^4 - 3y^2 - 3y + 3$

भाजक $= y - 2 \ \therefore \ y = 2$ घेऊन

$p(\boxed{}) = 2^4 - 3 \times 2^2 - 3(2) + 3 = \boxed{}$

अवयव सिद्धांतानुसार, बाकी = $\boxed{}$

$\therefore$ $(y-2)$ हा $y^4 - 3y^2 - 3y + 3$ चा अवयव $\boxed{}$

4) $(5m^2 - 3m + 7) \div (m + 1)$ हा भागाकार संश्लेषक भागाकार पद्धतीने करण्यासाठी खालील कृती करा.

$p(m) = 5m^2 - 3m + 7$

सहगुणक रूपात $p(m) = \boxed{}$

भाजक $= m + 1$

1 ची विरुद्ध संख्या $\boxed{}$

-1	5	-3	7
		$\boxed{}$	8
	$\boxed{}$	-8	$\boxed{}$

$\therefore$ भागाकाराचे सहगुणक रूप $\boxed{}$ आहे.

$\therefore$ भागाकार = $\boxed{}$ आणि बाकी $= 15$

5) $(a^3 - 3a + 5)$ व $(a^2 + 5)$ या बहुपदींचा गुणाकार करण्यासाठी खालील कृती करा.

$(a^3 - 3a + 5) \times (a^2 + 5)$

$= a^3 \times \boxed{} - 3a \times \boxed{} + \boxed{} \times (a^2 + 5)$

$= a^5 + 5a^3 - 3a^3 - \boxed{} + 5a^2 + 25$

$= a^5 + \boxed{} + 5a^2 - 15a + 25$

6) $(x - 1)$ हा $4x^3 + 3x^2 - 4x + m$ या बहुपदीचा अवयव असेल, तर m ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती करा.

भाज्य = $4x^3 + 3x^2 - 4x + m$

भाजक = $(x - 1)$

$\therefore$ -1 ची विरुद्ध संख्या ☐

सहगुणक रूप = $(4, 3, -4, m)$

1	4	3	-4	m
		4	7	3
	4	7	3	☐

परंतु बाकी = ☐ = 0

$\therefore$ m = ☐

m ची किंमत अन्य पद्धतीने काढा.

सरावासाठी उदाहरणे

1) $p(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - ax + b$ व $a, b \in R$ या बहुपदीस $(x-1)$ ने तसेच $(x+1)$ ने भागल्यास बाकी अनुक्रमे 5 आणि 19 उरते तर...

   i) a, b..... च्या किमती काढा व

   ii) $p(x)$ ला $x - 2$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा.

2) अशा दोन बहुपदी लिहा ज्यांची बेरीज $7m^3 - 5m^2 + 3m + 9$ आणि वजाबाकी $3m^3 + 11m^2 - m + 3$ आहे.

3) $x^2 + 6x + k$ या बहुपदीचा एक अवयव $(x + 3)$ असेल, तर k ची किंमत काढा.

4) $p(y) = y^3 - 4y + n$ या बहुपदीस $(y - 3)$ ने भाग दिल्यावर बाकी 5 उरते, तर n ची किंमत काढा.

5) $x^3 - x^2 - x + 1$ या राशीत कोणती राशी मिळवली, तर $5x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ ही बहुपदी मिळेल?

6) जर $p(y) = 2y^3 - 6y^2 - 5y + 7$, तर $p(z)$ काढा.

4 गुणोत्तर व प्रमाण

1) सारणीत दिलेल्या माहितीवरून चलनाचा प्रकार ओळखा व खालील सारणी पूर्ण करा.

पेनची संख्या (x)	2	5	....	7
पेनची किंमत (y)	10	....	15	....
गुणोत्तर ($x:y$ किंवा $\frac{x}{y}$)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	....	....
चलनाचा प्रकार				

2) खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.

3 मीटरचे 1 मी 75 सेमी शी असणारे गुणोत्तर किती?

3 मीटर = 3 × $\square$ = $\square$ सेमी

1 मी 75 सेमी = 1 × $\square$ + 75 = 175 सेमी

$\frac{3 \text{ मीटर}}{1 \text{ मी } 75 \text{ सेमी}} = \frac{\square}{175} = \frac{\square}{\square} = \square : \square$

3) अ) खालील गुणोत्तराचे शतमानात रूपांतर करा.

$\frac{13}{25} = \frac{13 \times \square}{25 \times \square}$

$= \frac{\square}{100}$

$= \square$ %

ब) खालील शतमान संक्षिप्त गुणोत्तराच्या रूपात लिहा.

$64\% = \frac{64}{\square}$

$= \frac{\square}{\square}$

$= \square : \square$

4) **खाली दिलेल्या संख्यारेषेवरून CF : AJ हे गुणोत्तर काढण्यासाठी प्रवाह आकृती पूर्ण करा.**

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5

संख्यारेषेवर CF आणि AJ यांची लांबी काढण्यासाठी निर्देशकाचे सूत्र वापरू.

CF व AJ मध्ये

CF ची लांबी

$= \square - \square$

$= \square$

AJ ची लांबी

$= \square - \square$

$= \square$

$$\frac{CF}{AJ} = \frac{\square}{\square} = \square : \square$$

5) **तुलना करा.**

$$\frac{3\sqrt{2}}{14\sqrt{3}} \quad , \quad \frac{2\sqrt{2}}{15\sqrt{3}}$$

तिरकस गुणाकार करू.

$3\sqrt{2} \times 15\sqrt{3} = \square$ .... (I)

$2\sqrt{2} \times 14\sqrt{3} = \square$ .... (II)

$\square > \square$ .... (III)

$\therefore \frac{3\sqrt{2}}{14\sqrt{3}} \square \frac{2\sqrt{2}}{15\sqrt{3}}$ .... (I, II व III वरून)

6) **जर $\frac{x}{y} = \frac{9}{7}$ असेल, तर खाली दिलेली सारणी पूर्ण करा.**

क्रिया	$\frac{x+y}{x-y}$ = ☐	$\frac{y}{x}$ = ☐	$\frac{x-y}{y}$ = ☐	$\frac{x+y}{y}$ = ☐
क्रियेचे नाव	....	....	....	....

7) **जर $\frac{x}{y} = \frac{8}{5}$ तर $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ ची किंमत काढण्यासाठी खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.**

$\therefore \frac{x}{y} = \frac{8}{5}$

$\therefore \frac{x^2}{y^2} = \frac{\square}{25}$ .... (दोन्ही बाजूंचे वर्ग करून)

$\therefore \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{\square + 25}{64 - \square}$ .... ☐

$\therefore \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{\square}{\square}$

8) **जर a, b व c परंपरित प्रमाणात असतील आणि $a = 16$ व $c = 9$ असेल, तर b ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

a, b व c परंपरित प्रमाणात आहेत.

$\therefore b^2 = \square \times \square$

$\therefore b^2 = 16 \times \square$

$\therefore b^2 = 144$

$\therefore b = \square$ .... (वर्गमुळे घेऊन)

9) **जर $\dfrac{a-c}{b+c} = \dfrac{a-b}{b}$ तर a, b, c परंपरित प्रमाणात आहेत हे दाखविण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

$\dfrac{a-c}{b+c} = \dfrac{a-b}{b}$

$\therefore\ b \times \boxed{} = \boxed{} \times (b+c)$

$\therefore\ \boxed{} - bc = ab + \boxed{} - b^2 - \boxed{}$

$\therefore\ b^2 = \boxed{}$

$\therefore\ a, b, c$ परंपरित प्रमाणात आहेत.

10) **एका शाळेत हॉकी, क्रिकेट आणि कबड्डी या खेळांत मिळून 194 विद्यार्थी आहेत. त्यापैकी हॉकी आणि क्रिकेट खेळणाऱ्या विद्यार्थ्यांच्या संख्येचे गुणोत्तर 4:7 आहे. क्रिकेट आणि कबड्डी खेळणाऱ्या विद्यार्थ्यांच्या संख्येचे गुणोत्तर 5 : 6 आहे, तर प्रत्येक प्रकारचा खेळ खेळणारे किती विद्यार्थी आहेत हे काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

कृती : समजा हॉकी, क्रिकेट आणि कबड्डी खेळणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या अनुक्रमे a, b व c आहे.

$\therefore\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{7}$ आणि $\dfrac{b}{c} = \dfrac{5}{6}$

$\therefore\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{4 \times \boxed{}}{7 \times \boxed{}} = \dfrac{20}{35}$ .... (I)

$\dfrac{b}{c} = \dfrac{5 \times \boxed{}}{6 \times \boxed{}} = \dfrac{35}{42}$ .... (II)

$a : b : c = \boxed{}$ .... (I व II वरून)

समानपट x मानू

$\therefore\ a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$ व $c = \boxed{}$ परंतु $a + b + c = \boxed{}$

$\therefore\ 20x + 35x + 42x = 194 \quad \therefore\ \boxed{} = 194 \quad \therefore\ x = \dfrac{194}{\boxed{}}$

$\therefore \; x =$ ☐

$\therefore$ हॉकी खेळणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या $= 20x = 20 \times$ ☐ $=$ ☐

$\therefore$ क्रिकेट खेळणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या $= 35x = 35 \times$ ☐ $=$ ☐

$\therefore$ कबड्डी खेळणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या $= 42x = 42 \times$ ☐ $=$ ☐

11) **जर** $\dfrac{a}{x+y} = \dfrac{b}{y+z} = \dfrac{c}{z-x}$ **तर** $b = a + c$ **दाखवा.**

सरावासाठी उदाहरणे

1) जर $bcx = cay = abz$ तर दाखवा की,
$$\frac{ax+by}{a^2+b^2} = \frac{by+cz}{b^2+c^2} = \frac{cz+ax}{c^2+a^2}$$

2) जर $\dfrac{y+z-x}{a} = \dfrac{z+x-y}{b} = \dfrac{x+y-z}{c}$ तर दाखवा की, $\dfrac{x+y+z}{a+b+c} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{ay+bz+cx}$

3) शिवानीकडे जुन्या नाण्यांचा संग्रह आहे. त्यामध्ये 1 रुपये, 50 पैसे व 25 पैसे अशी नाणी आहेत. त्यांच्या संख्येचे गुणोत्तर अनुक्रमे $3 : 2 : 4$ असून तिच्याकडे एकूण रक्कम 50 रुपये आहे, तर तिच्याकडे 50 पैशाची किती नाणी आहेत?

5 दोन चलांतील रेषीय समीकरणे

1) **खालील बहुपदींचे रेषीय बहुपदी व वर्ग बहुपदी असे वर्गीकरण करा.**

रेषीय बहुपदी		वर्ग बहुपदी
....	$3x^2 + 2x - 1$	....
....	$7y - 5$	....
....	$3m - 5m^2$	....
....	$4p$	....
	$3n + 8$	

2) **खाली दिलेल्या समीकरणांचे एकचल व दोन चलातील रेषीय समीकरण असे वर्गीकरण करा.**

एका चलातील रेषीय समीकरणे		दोन चलांतील रेषीय समीकरणे
....	$x + y = 20$	....
....	$3x + 5 = 2x$	....
....	$(x + 5) + (3 + y) = 17$	....
....	$3m = 9$	
	$2p = 3 \times q - 7$	

3) **खाली दिलेली समीकरणे सोडवा.**

कृती :

i) $x - 5 = 7$

$x = 7 + \square$

$x = \square$

ii) $\frac{y}{3} = 5$

$y = 5 \times \square$

$y = \square$

iii) $5m + 3 = 18$

$5m = 18 - \square$

$5m = \square$

$m = \frac{\square}{5}$

$m = \square$

4) **x हे चल वापरून खाली दिलेली विधाने गणिती भाषेत लिहा.**

i) एका संख्येत 4 मिळवले असता बेरीज 10 येते. $\Rightarrow$ $\boxed{x + 4 = 10}$

ii) एका संख्येची 5 पट 40 आहे. $\Rightarrow$ □

iii) एका संख्येतून 6 वजा केले असता वजाबाकी 10 येते. $\Rightarrow$ □

5) **खाली दिलेल्या प्रत्येक उपप्रश्नासाठी चार पर्यायी उत्तरे दिली आहेत. त्यापैकी अचूक उत्तराचा पर्याय निवडून त्याचे वर्णाक्षर लिहा.**

1) $x + y = 5$ या रेषीय समीकरणाच्या

A) अनेक उकली आहेत. B) फक्त एक उकल आहे.

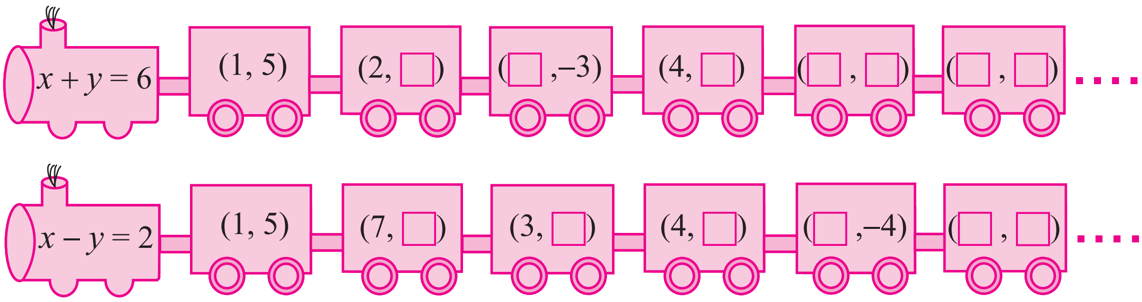
C) दोन उकली आहेत. D) उकल नाही. □

2) $ax + by = c$ या स्वरूपाचे दोन चलांतील रेषीय समीकरण होण्यासाठी खालीलपैकी कोणती अट योग्य नाही.

A) $a = 0$ आणि $b \neq 0$ B) $a \neq 0$ आणि $b = 0$

C) $a = 0$ आणि $b = 0$ D) $a \neq 0$ आणि $b \neq 0$ □

6)



दोन्ही समीकरणांची सामाईक उकल (□ , □) **आहे.**

7) **खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.**

i) खाली दिलेली एकसामायिक समीकरणे सोडवा.

$3x + 2y = 12$ .... (I)

$5x - 2y = 4$ .... (II)

उकल : वरील समीकरणांमध्ये [ ] या चलाचे सहगुणक समान आहेत. त्यांची बेरीज केल्याने 'y' चलाचा लोप होतो.

समीकरण (I) व (II) ची बेरीज करून

$$\begin{array}{rl} & 3x + 2y = 12 \\ + & 5x - 2y = 4 \\ \hline & \boxed{} = 16 \end{array}$$

$\therefore x = \dfrac{16}{\boxed{}}$

$\therefore x = \boxed{}$

x ची किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$3x + 2y = 12$

$3 \times \boxed{} + 2y = 12$

$2y = 12 - \boxed{}$

$\therefore 2y = \boxed{}$

$\therefore y = \boxed{}$

(......... , ...) ही या समीकरणांची उकल आहे.

ii) सोडवा. $2x - 3y = 4$; $3y - x = 4$

उकल : $2x - 3y = 4$ .... (I)

$3y - x = 4$ .... (II)

$-x + 3y = 4$ .... (II)

$\therefore$ y या चलाचा लोप करण्यासाठी समीकरण (I) व (II) ची बेरीज करून.

$$\begin{array}{rl} & 2x - 3y = 4 \\ + & -x + 3y = 4 \\ \hline & \boxed{} = \boxed{} \end{array}$$

$\therefore x = \boxed{}$

x ची किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$2x - 3y = 4$ .... (I)

$2 \times \boxed{} - 3y = 4$

$-3y = 4 - \boxed{}$

$\therefore y = \dfrac{\square}{-3}$

$\therefore y = \square$

$(\square, \square)$ ही या समीकरणांची उकल आहे.

iii) सोडवा. $8x + 5y = 9$; $3x + 2y = 4$

उकल : $8x + 5y = 9$ .... (I)

$3x + 2y = 4$ .... (II)

दोन्ही समीकरणांमध्ये कोणत्याही चलाचे सहगुणक समान नाहीत.

x चे सहगुणक समान करण्यासाठी समीकरण (I) ला 3 ने गुणू.

$24x + 15y = 27$ .... (III)

आणि समीकरण (II) ला 8 ने गुणू.

$24x + 16y = 32$ .... (IV)

$\therefore$ समीकरण (IV) मधून समीकरण (III) वजा करू.

$$\begin{array}{rcl} 24x + 16y & = & 32 \\ 24x + 15y & = & 27 \\ - \quad - & & - \\ \hline y & = & \square \end{array}$$

$y = \square$ ही किंमत समीकरण (II) मध्ये ठेवू.

$3x + 2y = 4$

$3x + 2 \times \square = 4$

$3x = 4 - \square$

$\therefore 3x = \square$

$x = \dfrac{\square}{3}$ $\quad x = \square$

(.......... , ...) ही या समीकरणांची उकल आहे.

iv) एका चलाची किंमत दुसऱ्या चलाच्या रूपात ठेवून एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

$x - 2y = 5$; $2x + 3y = 10$

उकल : $x - 2y = 5$ .... (I) $2x + 3y = 10$ .... (II)

समीकरण (I) वरून

$x - 2y = 5$

$x = 5 + 2y$ .... (III)

$x = 5 + 2y$ ही किंमत समीकरण (II) मध्ये ठेवू.

$2x + 3y = 10$

$2(5 + 2y) + 3y = 10$

$10 + \square + 3y = 10$

$7y = \square$ $\therefore y = \square$

$y = \square$ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$x - 2y = 5$

$x - 2 \times \square = 5$

$x - \square = 5$

$x = 5 + \square$

$x = \square$

(.......... , ...) ही या समीकरणांची उकल आहे.

v) $3x + 4y = 11$; $4x + 3y = 10$ तर $x + y$ ची किंमत काढा.

उकल : $3x + 4y = 11$ .... (I) $4x + 3y = 10$ .... (II)

$x + y$ ची किंमत काढण्यासाठी समीकरण (I) व (II) ची बेरीज करू

$$\begin{array}{rcrcl} 3x & + & 4y & = & 11 \\ 4x & + & 3y & = & 10 \\ \hline 7x & + & \square & = & \square \end{array}$$

$\therefore x + y = \square$ .... 7 ने भागून

8) **जर 4 खुर्च्या व 3 टेबल यांची किंमत ₹ 21,000 आहे आणि 5 खुर्च्या व 2 टेबल यांची किंमत ₹ 17,500 आहे, तर एक खुर्ची व एक टेबल यांची किंमत काढा. त्यासाठी दिलेली कृती पूर्ण करा.**

उकल : एका खुर्चीची किंमत ₹ x मानू | एका टेबलची किंमत ₹ y मानू

↓

4 खुर्च्यांची किंमत ₹ ☐ होईल | 3 टेबलांची किंमत ₹ ☐ होईल

↓

पहिल्या अटीनुसार, ☐ + ☐ = 21,000 .... (I)

↓

दुसऱ्या अटीनुसार $5x + 2y =$ ☐ .... (II)

y या चलाचा लोप करण्यासाठी समीकरण (I) ला 2 ने गुणू व समीकरण (II) ला 3 ने गुणू

$8x + 6y = 42,000$ .... (III)

☐ $+ 6y =$ ☐ .... (IV)

समीकरण (IV) मधून समीकरण (III) वजा करू

☐ $+ 6y =$ ☐

$8x + 6y = 42,000$

$- \quad - \quad -$

☐ $x = 10,500$

$x = \frac{10,500}{☐}$ $\therefore x =$ ☐

$x =$ ☐ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू

$4x + 3y = 21,000$

$4 \times$ ☐ $+ 3y = 21,000$

$3y = 21,000 -$ ☐

$\therefore 3y =$ ☐

$\therefore y =$ ☐

एका खुर्चीची किंमत = ₹ ☐ , एका टेबलाची किंमत = ₹ ☐

9) खालील प्रवाह आकृतीतील माहितीनुसार कृती करा.

मी समांतरभुज चौकोन आहे.
माझी नामनिर्देशित आकृती काढा.

माझ्या लगतच्या कोनांच्या मापांमधील फरक 30° आहे. लगतचे कोन वरील आकृतीत x व y अक्षराने दाखवा. यावरून समीकरण तयार करा.

पहिले समीकरण – I

माझ्या लगतच्या कोनांच्या गुणधर्मावरून दुसरे समीकरण तयार करा.

दुसरे समीकरण – II

उकल :

दोन्ही एकसामायिक समीकरणे सोडवून माझ्या सर्व कोनांची मापे काढा.

उत्तराचा पडताळा घ्या.

सरावासाठी उदाहरणे

1) **पुढील एकसामायिक समीकरणे सोडवा.**

i) $4x + 3y = 10$; $x + 3y = 7$

ii) $2x = 11 - 3y$; $5x = 22 - 2y$

iii) $\frac{x}{2} + y = 5$; $x + \frac{y}{2} = 5$

iv) $4(x + 1) + 3(y + 2) = 20$; $3x + 4y = 11$

2) गणितामध्ये मयूरला निखिलपेक्षा 15 गुण अधिक मिळाले. दोघांच्या गणितातील गुणांची बेरीज 185 आहे, तर प्रत्येकास किती गुण मिळाले?

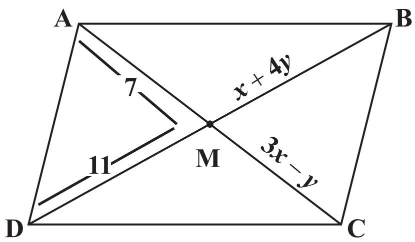
3) आयताची लांबी रुंदीपेक्षा 2 सेमीने जास्त आहे. जर आयताची परिमिती 16 सेमी असेल, तर त्या आयताची लांबी व रुंदी काढा.

4) अजय आणि विजय यांच्याजवळ काही आंबे आहेत. अजय विजयला म्हणाला की, ''जर तू मला तुझ्याजवळील 30 आंबे दिले तर माझ्याकडे तुझ्याजवळ उरलेल्या आंब्यांच्या दुप्पट आंबे होतील.'' विजय म्हणाला, ''तू जर मला 10 आंबे दिले तर माझ्याकडे तुझ्याजवळ उरलेल्या आंब्यांच्या तिप्पट आंबे होतील.'' तर प्रत्येकाकडे किती आंबे होते?

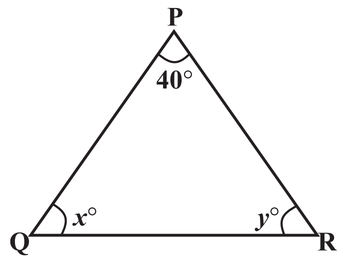
5) श्रेयाजवळ फक्त ₹ 5 व ₹ 10 ची नाणी होती. दोन्ही मिळून तिच्याजवळ एकूण 50 नाणी होती व त्यांची एकूण किंमत ₹ 325 होती, तर श्रेयाजवळ प्रत्येक प्रकारची किती नाणी होती?

6) खालील शाब्दिक उदाहरणे एकसामायिक समीकरणांच्या साहाय्याने सोडवा.

i) □ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. आकृतीमध्ये दिलेल्या माहितीवरून x व y च्या किमती काढा. त्यावरून AC व BD च्या लांबी काढा.



ii) जर ∠Q व ∠R यांच्या मापातील फरक 30° असेल, तर आकृतीवरून x व y च्या किमती काढा. तसेच कोनांच्या मापावरून त्रिकोणाचा प्रकार लिहा.



6 अर्थनियोजन

1) खाली दिलेला उतारा वाचा व त्याखालील कृती पूर्ण करा.

एका प्रगतशील शेतकऱ्याने आपल्या एक एकर शेतात उसाचे पीक घेण्याचे ठरविले. त्यासाठी त्यांनी ट्रॅक्टरच्या साहाय्याने जमिनीची पेरणीपूर्व मशागत (नांगरणी, सरी पाडणे इत्यादी कामे) करून घेतली. त्यासाठी ₹ 10,400 खर्च आला. ऊस लागणीसाठी येणारा रोपांचा खर्च ₹ 12,000 व लागण खर्च ₹ 3,000 आला. ऊस लागणीनंतर खते ₹ 20,000, औषध व फवारणी खर्च ₹ 10,000 आणि आंतरमशागत व तण काढण्याचा खर्च ₹ 15,000 इतका आला. त्यांनी पाणी पुरवठा संस्थेस एकरी ₹ 8,000 पाणीपट्टी दिली. त्यांनी आंतरपीक म्हणून सोयाबीनचे पीक घेतले. त्या कामी ₹ 2,000 चे बियाणे खरेदी केले. त्या बियाणांचा लागण खर्च ₹ 2000 आला. सोयाबीन पिकासाठी औषध व फवारणीचा खर्च ₹ 4,000 आला सोयाबीन काढणी व मळणी खर्च ₹ 7,000 आला.

त्यांना एकरी 8 क्विंटल सोयाबीनचे उत्पादन मिळाले. ₹ 4,000 प्रति क्विंटल भावाने त्यांनी सोयाबीनची विक्री केली. 15 ते 18 महिन्यांनी उसाची तोड करून साखर कारखान्यास गाळपासाठी पाठविला. एक एकरमध्ये त्यांना 65 टन उसाचे उत्पादन मिळाले. साखर कारखान्याकडून त्यांना प्रति टन ₹ 2,920 दर मिळाला.

कृती :

खर्च	रु.	जमा	रु.
पेरणीपूर्व मशागत		सोयाबीन विक्री करून मिळालेली रक्कम = $8 \times 4{,}000$	
रोपांचा खर्च			
लागण खर्च			
खत खर्च		साखर कारखान्याकडून मिळालेली रक्कम = 65×2920	
औषध व फवारणी खर्च			
पाणीपट्टी खर्च			
आंतरमशागत व तण काढणे खर्च			
सोयाबीन बियाणे खर्च			
सोयाबीन औषध व फवारणी खर्च			
सोयाबीन काढणी व मळणी खर्च			
सोयाबीन लागण खर्च			
एकूण खर्च =		एकूण उत्पन्न =	

निव्वळ नफा = एकूण उत्पन्न – एकूण खर्च = ☐ – ☐ = ₹ ☐

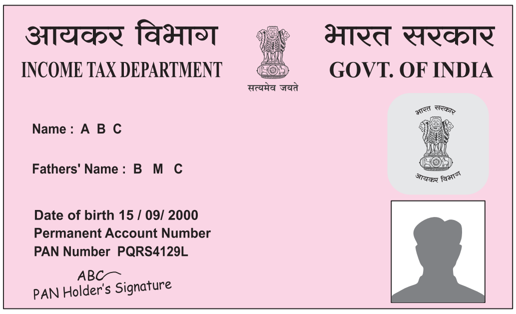
2) खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.

i) $1200 \times \frac{2}{100} = \boxed{}$

ii) 700 च्या 20 % $= 700 \times \frac{\boxed{}}{100} = \boxed{}$

iii) 1,27,000 च्या 10% $= 1,27,000 \times \frac{\boxed{}}{100} = \boxed{}$

3) पॅनकार्डचे निरीक्षण करून खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.



1) पॅनकार्ड धारकाचे नाव : ....

2) पॅनकार्ड धारकाची जन्म तारीख : ....

3) पॅनकार्ड क्रमांक : ....

4) पॅनकार्ड कोणत्या विभागाकडून दिले जाते ? : ....

4) खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.

अ. क्र.	आर्थिक वर्ष	आयकर आकारणी वर्ष
1)	2019 – 2020	....
2)	....	2022 – 2023

5) **आयकर आकारणी करताना कलम 80C, 80D, 80G अन्वये काही गुंतवणुकीवर सवलत मिळते. अशा काही गुंतवणुकी खाली दिलेल्या आहेत. त्यावरून खालील कृती पूर्ण करा.**

पंतप्रधान मदत निधी | आरोग्य विमा | गृहकर्ज (मुद्दल)

लोकभविष्य निर्वाह निधी (P.P.F) | जीवन विमा | मुख्यमंत्री मदत निधी

उकल : कलम 80 C ⇒ ______ , ______ , ______

कमल 80 D ⇒ ______

कलम 80 G ⇒ ______ , ______

6) **खाली दिलेल्या सारणीचे निरीक्षण करून कृती पूर्ण करा. (पाठ्यपुस्तकातील पृष्ठ क्र. 102 व 103 वरील सारणीचा संदर्भ घ्या.)**

उकल :

अ. क्र.	व्यक्ती	वय (वर्षे)	करपात्र उत्पन्न (₹)	आयकर भरावा लागेल किंवा नाही.
1.	श्री. करण	39	₹ 9,60,000	
2.	श्रीमती प्रगती	28	₹ 2,30,000	
3.	श्री. पियुष	84	₹ 4,40,000	
4.	श्रीमती मिताली	68	₹ 7,90,000	

7) खुशीचे मासिक उत्पन्न ₹ 9,000 आहे. त्यापैकी ती ₹ 7,290 खर्च करते, तर ती आपल्या उत्पन्नाच्या किती टक्के बचत करते. यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल : खुशीचे मासिक उत्पन्न = ₹ 9000

∴ खुशीने केलेली बचत = ₹ 9000 – [ ] = ₹ 1710

बचतीची टक्केवारी = $\frac{1710}{[\ ]}$ × [ ] ∴ खुशीच्या बचतीची टक्केवारी = [ ]

8) श्री. संकल्प पाटील पगाराच्या 10% घरभाडे व 40% दैनंदिन खर्च करतात. 35% बचत करतात. उरलेले ₹ 3,000 मुलांच्या शिक्षणावर खर्च करतात. त्यांचा मासिक पगार काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल : समजा श्री. संकल्प यांचा मासिक पगार ₹ x आहे असे मानू.

खर्चाची एकूण टक्केवारी = 10% + 40% + 35% = 85%

∴ खर्च केलेली रक्कम = $x \times \frac{85}{100}$ = [ ]

∴ [ ] + 3000 = x

∴ [ ] + 60,000 = [ ]

∴ [ ] x = 60,000

∴ x = [ ]

∴ श्री. संकल्प यांचा मासिक पगार = ₹ [ ]

9) श्री. कांतीलाल यांचा मासिक पगार ₹ 45,000 आहे. त्यांनी खालीलप्रमाणे गुंतवणूक केली.

i) विमा हप्ता = ₹ 30,000

ii) भविष्य निर्वाह निधी = ₹ 12,000

iii) राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्र योजना = ₹ 8,000

श्री. कांतीलाल यांची करपात्र रक्कम काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल : 1) एकूण वार्षिक उत्पन्न = ₹ [ ]

2) एकूण कपात (नियम 80C प्रमाणे)

i) विमा हप्ता = ₹ 30,000

ii) भविष्य निर्वाह निधी = ₹ 12,000

iii) राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्र योजना = ₹ 8,000 एकूण कपात = ₹ [ ]

3) करपात्र रक्कम = ₹ [ ] – [ ] ∴ करपात्र रक्कम = ₹ [ ]

10) साजिद आपल्या मासिक उत्पन्नाच्या 42% खर्च करतात व ₹ 29,000 बचत करतात, तर त्यांचे मासिक उत्पन्न काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल : समजा साजिदचे मासिक उत्पन्न = ₹ x आहे.

∴ खर्च केलेली रक्कम = ₹ x × ₹ [ ] = ₹ [ ]

बचत केलेली रक्कम = ₹ 29,000

∴ [ ] + 29,000 = x

∴ [ ] + 29,00,000 = 100x

∴ 29,00,000 = [ ]

∴ $\frac{29,00,000}{[\ ]} = x$

∴ साजिदचे मासिक उत्पन्न = ₹ [ ]

11) रमाकांतने आपल्या मासिक उत्पन्नाच्या 50% खर्च केले. उरलेल्या रकमेच्या 20% देणगी दिली. तेव्हा त्यांच्याकडे ₹ 2,400 शिल्लक राहिले, तर रमाकांतचे मासिक उत्पन्न काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल : समजा रमाकांतचे मासिक उत्पन्न = ₹ x आहे.

खर्च = $x \times \frac{50}{100}$ = ₹ $\frac{x}{2}$

उरलेली रक्कम $= x - \dfrac{x}{2} =$ ₹ $\boxed{}$

देणगी $= \boxed{} \times \dfrac{20}{100} =$ ₹ $\boxed{}$

$\therefore \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{10} + \boxed{}$

$\therefore \boxed{} = x + 24{,}000$

$\therefore 4x = 24{,}000$

$\therefore x = \boxed{}$

$\therefore$ रमाकांतचे मासिक उत्पन्न ₹ $\boxed{}$ आहे.

12) सबाचे वय 25 वर्षे असून तिचे करपात्र उत्पन्न ₹ 12,30,000 आहे, तर तिला भरावा लागणारा आयकर काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल : सबाचे करपात्र उत्पन्न ₹ दहा लाखांपेक्षा अधिक या टप्प्यात आहे.

$\therefore$ आयकर $= 1{,}12{,}500 + \left(12{,}30{,}000 - \boxed{}\right) \times 30\%$

$\therefore$ आयकर $= 1{,}12{,}500 + \boxed{} \times \dfrac{30}{100}$

$\therefore$ आयकर $= 1{,}12{,}500 + \boxed{}$

$\therefore$ आयकर = ₹ 1,81,500

शिक्षण उपकर $= 1{,}81{,}500 \times \boxed{}$ = ₹ 3,630

माध्यमिक व उच्चशिक्षण उपकर $= 1{,}81{,}500 \times \boxed{}$ = ₹ 1815

$\therefore$ एकूण आयकर $= 1{,}81{,}500 + 3{,}630 + 1{,}815 =$ ₹ $\boxed{}$

सरावासाठी उदाहरणे

1) श्री. प्रसन्न (वय वर्षे 44) एका कंपनीत नोकरी करतात त्यांचा दरमहा पगार ₹ 43,700 आहे. ते भविष्य निर्वाह निधी खात्यात दरमहा ₹ 3,300 गुंतवितात. त्यांनी ₹ 10,000 चे राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्र खरेदी केले व मुख्यमंत्री मदत निधीला ₹ 9,000 दिले, तर त्यांच्या आयकराचे गणन करा.

2) श्री. हरिभाऊ हे 68 वर्षीय गृहस्थ आहेत. ते एका खाजगी कंपनीत नोकरी करतात. त्यांचे वार्षिक उत्पन्न ₹ 7,50,000 आहे. त्यांनी आरोग्य विम्याचा वार्षिक हप्ता ₹ 30,000 भरला व राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्रात ₹ 15,000 गुंतविले, तर श्री. हरीभाऊ यांना किती आयकर भरावा लागेल?

3) श्रीमती सीमा या 29 वर्षांच्या आहेत. त्यांचे वार्षिक उत्पन्न ₹ 4,80,000 आहे. त्यांनी कोणतीही गुंतवणूक केलेली नाही. तर खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.
   i) श्रीमती सीमा यांना किती आयकर भरावा लागेल?
   ii) श्रीमती सीमा यांना शून्य आयकर बसू शकतो का? त्यासाठी त्यांनी कोणकोणत्या बाबींवर किती गुंतवणूक केली पाहिजे?

4) खाली दिलेल्या माहितीवरून श्री. सुजित (वय वर्षे 52) यांना भरावा लागणारा आयकर काढण्यासाठी शाब्दिक उदाहरण तयार करा.

   श्री. सुजित यांचे करपात्र उत्पन्न काढा.
   1) एकूण वार्षिक उत्पन्न = ₹ 10,00,000
   2) 80C नुसार एकूण गुंतवणूक
      i) विमा हप्ता = ₹ 30,000
      ii) गृह कर्ज (मुद्दल) = ₹ 70,000
      iii) राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्र = ₹ 50,000
   3) 80G प्रमाणे मुख्यमंत्री सहाय्यता निधी = ₹ 10,000

5) वार्षिक उत्पन्न = ₹ 9,60,000
   80C प्रमाणे गुंतवणूक = ₹ 1,10,000
   80G प्रमाणे गुंतवणूक = ₹ 20,000
   80D प्रमाणे गुंतवणूक = ₹ 15,000
   वरील माहितीचा वापर करून 80C, 80G, 80D प्रमाणे गुंतवणुकीनुसार अंतर्गत बाबींचा समावेश करून शाब्दिक उदाहरण तयार करा. (व्यक्तीचे नाव व वय नमूद करावे.)

6) श्रीमती कमल यांचे वय 65 वर्षे असून त्यांचे करपात्र उत्पन्न ₹ 4,60,000 आहे.
   i) त्यांना करातून वजावट मिळू शकेल, अशी कोणतीही बचत त्यांनी केलेली नसेल, तर त्यांचे उत्पन्न आयकराच्या कोणत्या टप्प्यात बसेल?
   ii) उपकर लागू होणारी रक्कम काढा.

7 सांख्यिकी

1) क्रिकेटच्या सामन्यात अथर्वने पाच षटकांमध्ये काढलेल्या धावा अनुक्रमे 11, 7, 3, x आणि 9 आहेत. या धावांचे मध्यमान 8 असल्यास चौथ्या षटकात त्याने किती धावा काढल्या ?

उकल : $\text{मध्यमान} = \dfrac{\text{सर्व प्राप्तांकांची बेरीज}}{\text{प्राप्तांकांची एकूण संख्या}}$

$\therefore 8 = \dfrac{11 + 7 + 3 + x + 9}{\square}$ $\therefore x + \square = \square$

$\therefore x = \square$ ∴ अथर्वने चौथ्या षटकात काढलेल्या धावा □ आहेत.

2) खाली दिलेली वारंवारता सारणी पूर्ण करा.

उकल :

प्राप्तांक	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (fi)
5		4
6	卌 |	
7		12
8		
9	卌 卌 |||	
		N = 40

3) 6 प्राप्तांकांचा मध्य 12 आहे. त्यातील एक प्राप्तांक वगळला असता उरलेल्या प्राप्तांकांचा मध्य 12.8 आहे, तर वगळलेला प्राप्तांक शोधण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल : 6 प्राप्तांकांचा मध्य = 12

∴ 6 प्राप्तांकांची बेरीज $= 6 \times \square = \square$

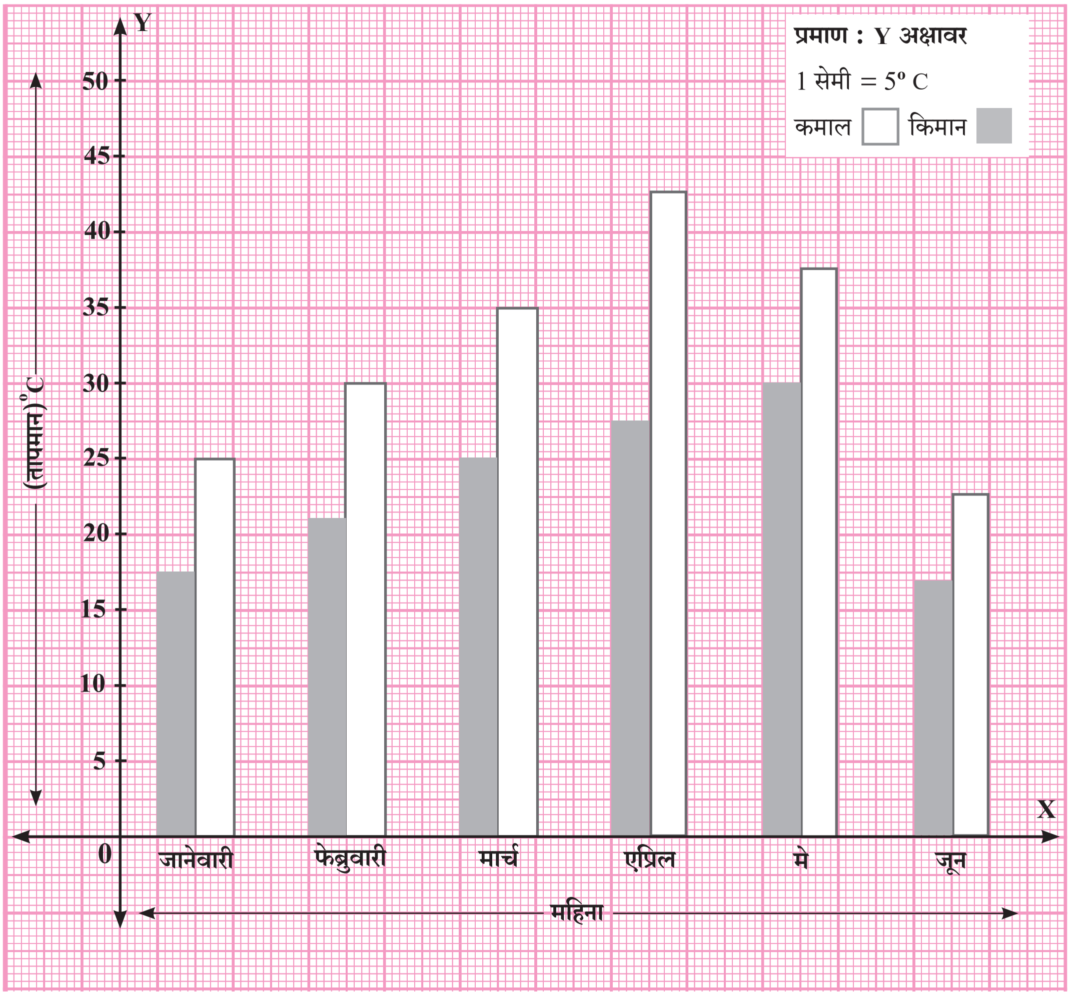
5 प्राप्तांकांचा मध्य = 12.8

∴ 5 प्राप्तांकांची बेरीज $= 5 \times \square = \square$

∴ वगळलेला प्राप्तांक $= \square - \square$

∴ वगळलेला प्राप्तांक = □ आहे.

4) **चंद्रपूर या शहराची सहा महिन्यांच्या कमाल व किमान सरासरी तापमानाची नोंद खाली दिलेल्या जोडस्तंभालेखामध्ये दर्शविली आहे. त्याचे निरीक्षण करून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.**



उकल : 1) जून महिन्याचे किमान व कमाल तापमान लिहा. ....

2) कोणत्या महिन्यातील कमाल व किमान तापमानात जास्त फरक आहे? ....

3) फेब्रुवारी आणि मे महिन्यांच्या कमाल तापमानातील फरक किती आहे?

....

4) सर्व महिन्यातील कमाल सरासरी तापमान किती आहे?

....

5) **i) चार महाविद्यालयातील विद्यार्थ्यांचा नोकरी किंवा स्वतंत्र व्यवसाय यासंबंधीचा कल जाणण्यासाठी पाहणी केली. या पाहणीमध्ये मिळालेली माहिती खाली दिली आहे.**

महाविद्यालयाचा अनुक्रमांक	I	II	III	IV
स्वतंत्र व्यवसाय करण्याकडे कल असलेले विद्यार्थी	45	55	32	56
नोकरी करण्याकडे कल असलेले विद्यार्थी	45	45	48	24

या माहितीचा विभाजित स्तंभालेख काढा. (प्रमाण : Y अक्षावर 1 सेमी = 10 विद्यार्थी)

उकल :

ii) खाली दिलेल्या माहितीच्या आधारे शतमान स्तंभालेख काढा.

(प्रमाण : Y अक्षावर 1 सेमी = 10 विद्यार्थी)

उकल :

महाविद्यालयाचा अनुक्रमांक	I	II	III	IV
स्वतंत्र व्यवसाय करण्याकडे कल असणारे विद्यार्थी	$\frac{45}{90} \times 100 = 50\%$			
नोकरीकडे कल असलेले विद्यार्थी	$\frac{45}{90} \times 100 = 50\%$			

6) सोबतच्या वारंवारता सारणीचे निरीक्षण करून खाली दिलेल्या प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

वर्ग	वारंवारता
118-126	3
127-135	5
136-144	9
145-153	12
154-162	5
163-171	4
172-180	2

उकल : 1) सारणीतील माहितीवरून वर्गांतर लिहा.

....

2) कोणत्या वर्गाची वारंवारता सर्वाधिक आहे?

....

3) 127-135 या वर्गाच्या वर्गमर्यादा लिहा.

i) खालची वर्गमर्यादा [ ]

ii) वरची वर्गमर्यादा [ ]

4) 172-180 या वर्गाचा वर्गमध्य लिहा.

....

5) 145-153 या वर्गाची खरी खालची व खरी वरची मर्यादा लिहा.

....

7) 40 अभियंत्यांच्या घरापासून त्यांच्या कंपनीपर्यंतचे अंतर (किमी मध्ये) खालीलप्रमाणे आहे.

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
12	14	2	9	6	15	15	7	6	12

या माहितीवरून खाली दिलेली सारणी पूर्ण करा.

उकल :

वर्ग		वर्गमध्य	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता	संचित वारंवारता	
समावेशक (खंडित वर्ग)	असमावेशक (अखंडित वर्ग)				पेक्षा कमी	तेवढी व पेक्षा जास्त
1 - 5	0.5 - 5.5					
6 - 10						
11 - 15						
16 - 20						
21 - 25						
26 - 30						
31 - 35						
				N =		

8) **खाली दिलेल्या वारंवारता सारणीचा मध्य 17. 25 आहे, तर a ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

x_i	5	10	15	20	25
f_i	2	3	a	6	5

उकल :

x_i	f_i	$f_i x_i$
5	2	10
10	3	
15	a	15a
20	6	
25	5	
	N =	$\Sigma f_i x_i$ =

वारंवारता सारणीचा मध्य = 17.25

मध्य $(\bar{x}) = \dfrac{\square}{\square}$

$\therefore\ 17.25 = \dfrac{\square}{\square}$

$\therefore$ a = $\square$

9) **पहिल्या आठ नैसर्गिक संख्यांच्या वर्गांचा मध्यक काढण्यासाठी खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.**

उकल : सामग्रीत येणाऱ्या संख्यांचा चढता क्रम $\square$

N = 8 (सम)

$\therefore$ मध्यावर येणाऱ्या संख्या $\square$ व $\square$

$\therefore$ सामग्रीचा मध्यक = $\dfrac{\square + \square}{2}$

$$= \frac{\square}{2}$$

$$= \square$$

∴ सामग्रीचा मध्यक $\square$ आहे.

सरावासाठी उदाहरणे

1) एका शाळेतील 30 विद्यार्थ्यांपैकी 28 विद्यार्थ्यांचे शेकडा गुण दर्शविणारी वारंवारता सारणी खाली दिलेली आहे.

वर्ग (शेकडा गुण)	वारंवारता
61 - 65	06
66 - 70	10
71 - 75	10
76 - 80	02
	एकूण N = 28

उर्वरीत दोन विद्यार्थ्यांचे शेकडा गुण 70.5 आणि 75.5 असतील, तर एकूण 30 विद्यार्थ्यांची वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

2) 15 विद्यार्थ्यांचे गणित विषयातील 100 पैकी गुण खाली दिलेले आहेत.

41, 39, 48, 52, 62, 46, 40, 54, 96,
52, 98, 40, 42, 52, 98, 40, 42, 52, 60

यावरून मध्य, मध्यक व बहुलक काढा.

3) एका सामग्रीत 50 संख्या आहेत. प्रत्येक संख्या 53 मधून वजा केल्यानंतर बेरीज –3.5 मिळते, तर दिलेल्या संख्यांचा मध्य शोधा.

4) कोणत्याही आठ वेगवेगळ्या संख्या घ्या. त्या चढत्या क्रमाने मांडून सातव्या क्रमांकाच्या संख्येत 10 मिळविले असता, मध्य व मध्यक मध्ये काय बदल येईल ते स्पष्ट करा.

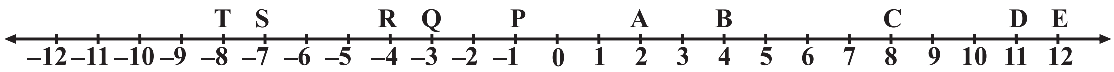
5) 100 चे विभाजक लिहा. त्यांचा 1) मध्य काढा. 2) मध्यक काढा.
3) मध्य व मध्यक यांमधील फरक काढा. 4) मध्याचे मध्यकाशी असणारे गुणोत्तर लिहा.

6) 125 संख्यांचा मध्य 65 आहे. जर प्रत्येक संख्येस 3 ने गुणले, तर नवीन मध्य काढा.

भाग – 2

1 भूमितीतील मूलभूत संबोध

1) खाली दिलेल्या संख्यारेषेचे निरीक्षण करून दिलेली कृती पूर्ण करा.



कृती :

बिंदू	S		P	
निर्देशक		11		–3

2) खालील सारणीत बिंदूंचे निर्देशक दिले आहेत. त्यावरून दिलेली कृती पूर्ण करा.

बिंदू	S	C	E	R	T	P
निर्देशक	– 4	7	3	– 5	8	– 1

कृती :

i) d (C, R) = ?

बिंदू C चा निर्देशक = 7,

बिंदू R चा निर्देशक = – 5,

7 ☐ – 5

∴ d (C, R) = ☐ – ☐

∴ d (C, R) = ☐

ii) d (S, P) = ?

iii) कोणत्या दोन बिंदूंमधील अंतर 1 आहे ?

....

iv) रेख CE शी एकरूप असणारे दोन रेषाखंड लिहा.

....

3) **शेताच्या बांधावर सरळ रेषेत आंबा, चिकू व पेरूची झाडे आहेत. आंबा व चिकू, आंबा व पेरू आणि चिकू व पेरू या झाडांमधील अंतर अनुक्रमे 14 फूट , 22 फूट व 8 फूट आहे, तर खालील कृतीवरून कोणते झाड, कोणत्या दोन झाडांच्या दरम्यान आहे ते ठरवा.**

कृती :

समजा, आंबा, चिकू व पेरू ही झाडे अनुक्रमे A, B व C या ठिकाणी आहेत.

$d(\text{A, C}) = \square$ .... (I)

$d(\text{B, C}) = \square$, $d(\text{A, B}) = \square$

$\therefore\ d(\text{A, B}) + d(\text{B, C}) = \square$ .... (II)

$\square = \square + d(\text{B, C}) =$ .... (विधान I व II वरून)

$\therefore$ $\square$ हे झाड $\square$ व $\square$ या झाडांच्या दरम्यान आहे.

4) **एकाच संख्यारेषेवर A, T, M हे बिंदू असे आहेत की, $d(\text{A, T}) = 6$ व $d(\text{A, M}) = 11$ ही माहिती दर्शविणाऱ्या संभाव्य आकृत्या काढा व $d(\text{T, M})$ शोधा.**

कृती :

आकृती - 1	आकृती - 2
$d(\text{T, M}) = \square$	$d(\text{T, M}) = \square$

5) **खाली दिलेल्या माहितीच्या आधारे कृती पूर्ण करा.**

कृती :

विधान	सशर्त विधान	व्यत्यास
1) त्रिज्या समान असणारी वर्तुळे एकरूप असतात.		
2) त्रिकोणाचे दोन कोन एकरूप असल्यास त्या कोनांसमोरील बाजू एकरूप असतात.		

6) **सोबतच्या आकृतीतील कोनांची मापे मोजा आणि खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.**

कृती : $m\angle APC =$ ☐

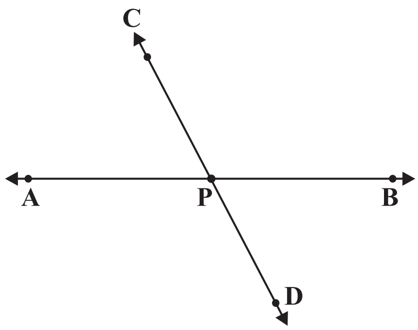
$m\angle BPC =$ ☐

$m\angle BPD =$ ☐

$m\angle APD =$ ☐

$\therefore$ ☐ $\cong$ ☐

$\therefore$ ☐ $\cong$ ☐



दोन रेषा एकमेकींना छेदल्यास होणारे परस्पर विरुद्ध कोन ☐ असतात.

7) **दिलेल्या विधानांसाठी नामनिर्देशित आकृती काढून पक्ष व साध्य लिहा.**

i) वर्तुळकेंद्रातून जीवेवर काढलेला लंब जीवेस दुभागतो.	ii) काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.
आकृती :	आकृती :
पक्ष :	पक्ष :
साध्य :	साध्य :

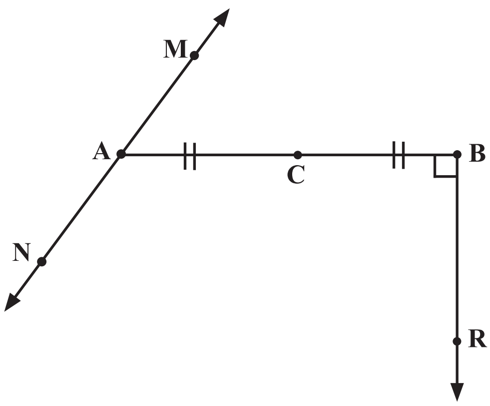
8) **संख्यारेषेवर M बिंदूचा निर्देशक -5 आहे, तर M पासून 9 एकक अंतरावर असणाऱ्या दोन्ही बिंदूंचे निर्देशक काढा.**

9) **खालील बाबींच्या नामनिर्देशित आकृती काढा.**

कृती :

समांतर रेषा	नैकरेषीय बिंदू	एकरेषीय बिंदू

10)



वरील आकृतीचे निरीक्षण करून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

कृती : 1) किरण AN चा विरुद्ध किरण ☐

2) बिंदू C हा रेख AB चा ☐ आहे.

3) आकृतीमधील लंबता = ☐ ⊥ ☐

4) एकरूप रेषाखंडाची जोडी रेख ☐ ≅ रेख ☐

5) रेषा MN ∩ रेख AB = ☐

12) M हा रेख AB चा मध्यबिंदू आहे AM = 3.5 सेमी असल्यास रेख AB ची लांबी काढण्यासाठी कृती पूर्ण करा.

कृती : $AM = \frac{1}{2}$ ☐ (मध्यबिंदूचा गुणधर्म)

$3.5 = \frac{1}{2}$ ☐

$\therefore AB =$ ☐

सरावासाठी उदाहरणे

1) संख्यारेषेवर बिंदू M चा निर्देशक – 6 आहे आणि N चा निर्देशक – 12 आहे. तर d (M, N) काढा. बिंदू A हा रेख MN चा मध्यबिंदू आहे, तर AM = किती ?

2) खालील विधानांचे व्यत्यास लिहा.

i) दोन कोनांची बेरीज 180° असेल, तर ते परस्परांचे पूरककोन असतात.

ii) समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

iii) एकाच वर्तुळातील एकरूप जीवा वर्तुळकेंद्रापासून समान अंतरावर असतात.

3) नामनिर्देशित आकृती काढून पक्ष व साध्य लिहा.

i) चौकोनाचे कर्ण एकरूप असतील, तर तो आयत असतो.

ii) काटकोन त्रिकोणामध्ये कर्णाचा वर्ग इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.

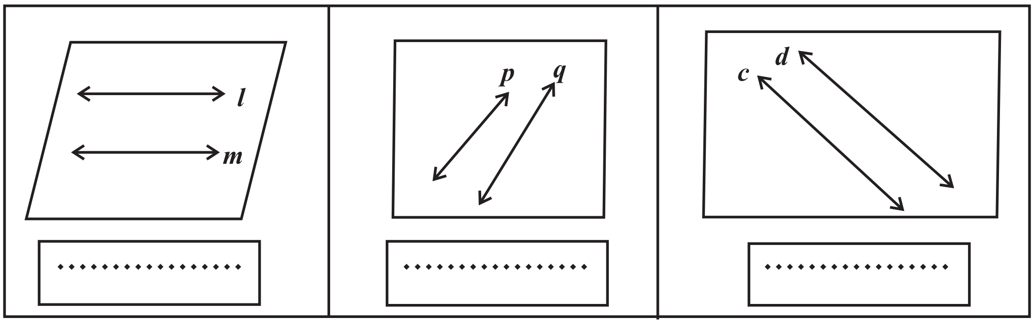
4) बिंदू N हा रेख PM चा मध्यबिंदू आहे, NP = 3.4 तर रेख PM ची लांबी काढा.

तसेच, (i) रेख PN ≅ रेख MN व

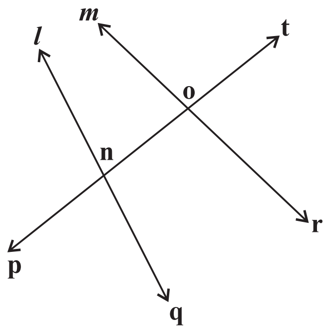
(ii) रेख PM > रेख PN दाखवा.

2 समांतर रेषा

1) खाली दिलेल्या आकृतीमधील रेषा समांतर आहेत की नाहीत ते लिहा.

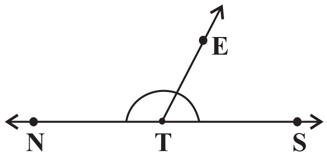
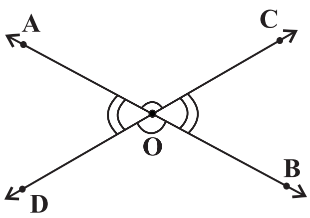


2) खाली दिलेल्या आकृतीचे निरीक्षण करून सारणी पूर्ण करा.

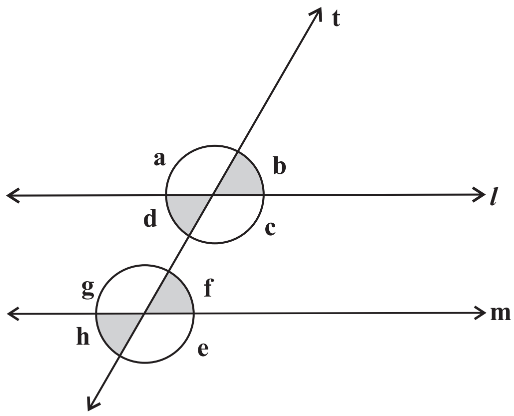


संगत कोनांच्या जोड्या	1)	2) ....
	3)	4) ....
आंतरव्युत्क्रम कोनांच्या जोड्या	1)	2) ....
आंतरकोनांच्या जोड्या	1)	2) ....
बाह्यव्युत्क्रम कोनांच्या जोड्या	1)	2) ....

3) खाली दिलेल्या आकृत्यांचे निरीक्षण करून सारणी पूर्ण करा.

आकृती	गुणधर्म (शब्दांत)	गुणधर्म (आकृतीवरून)
1) 	रेषीय जोडीतील कोन परस्परांचे पूरक कोन असतात.	$\angle NTE + \angle STE =$ ☐
2) 	....	1) $\angle AOC \cong \angle BOD$ 2) $\angle BOC \cong$ ☐

4) खालील आकृतीमध्ये रेषा l || रेषा m आणि रेषा t ही त्यांची छेदिका आहे. आकृतीमध्ये तयार झालेल्या सर्व कोनांची मापे कोनमापकाच्या साहाय्याने मोजा आणि खालील कृती पूर्ण करा.

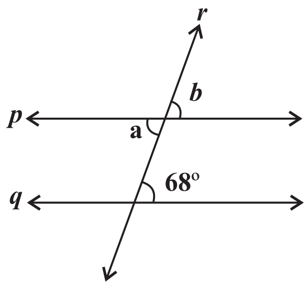


कोनाचे माप	कोनाचे माप
$\angle a =$ .... $^{\circ}$	$\angle e =$ .... $^{\circ}$
$\angle b =$ .... $^{\circ}$	$\angle f =$ .... $^{\circ}$
$\angle c =$ .... $^{\circ}$	$\angle g =$ .... $^{\circ}$
$\angle d =$ .... $^{\circ}$	$\angle h =$ .... $^{\circ}$

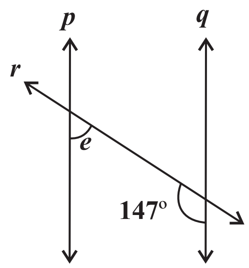
संगत कोन जोड्या	आंतरव्युत्क्रम कोन जोड्या	बाह्यव्युत्क्रम कोन जोड्या	छेदिकेच्या एकाच अंगास तयार झालेल्या कोनांच्या जोड्या
1) $\angle a \cong \angle g$	....	....	1) $\angle c + \angle f = 180^{\circ}$
2)	....	....	....
3)	2) $\angle d \cong \angle f$	....	....
4)	....	....	....

5) खालील प्रत्येक आकृतीमध्ये रेषा $p \parallel$ रेषा q असून रेषा r ही त्यांची छेदिका आहे, तर खाली विचारलेल्या कोनांची मापे काढण्यासाठी कृती पूर्ण करा.

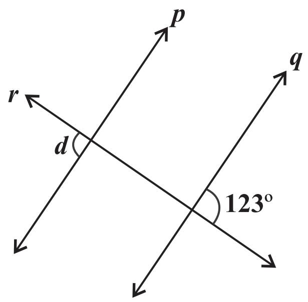
कृती :

1) 

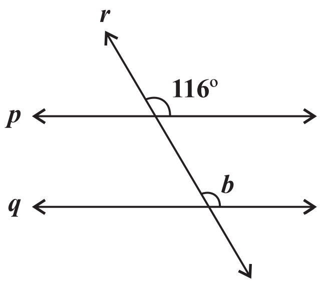
$\angle a$ = ...° (व्युत्क्रम कोन)

2) 

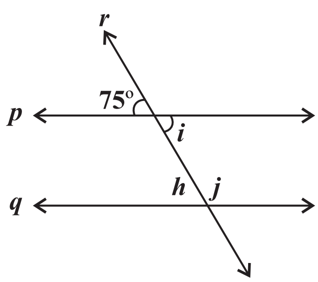
$\angle e$ = ...° (..............................)

3) 

$\angle d$ = ...° (..............................)

4) 

$\angle b$ = ...° (..............................)

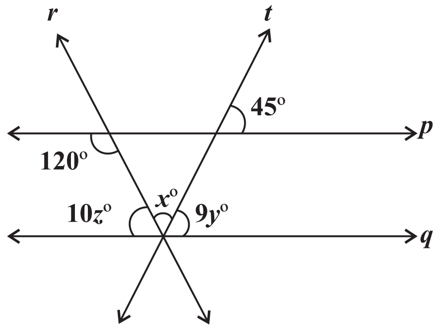
5) 

i) $\angle i$ = ...° ... (..............................)

ii) $\angle j$ = ...° ... (..............................)

iii) $\angle h$ = ...° ... (..............................)

6) **आकृतीमध्ये रेषा $p \parallel$ रेषा q असून रेषा r व रेषा t या त्यांच्या छेदिका आहेत. तर आकृतीमधील दिलेल्या माहितीवरून x, y व z यांच्या किंमती काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**



कृती :

आकृतीमध्ये,

रेषा $p \parallel$ रेषा q आणि रेषा r ही छेदिका .... (पक्ष)

$\therefore\ 120° + 10z° =$ ☐ ..... (☐)

$10z = 180° -$ ☐

$10z =$ ☐

$\therefore\ z =$ ☐

रेषा $p \parallel$ रेषा q आणि रेषा t ही छेदिका

$9y =$ ☐ .... (.........................)

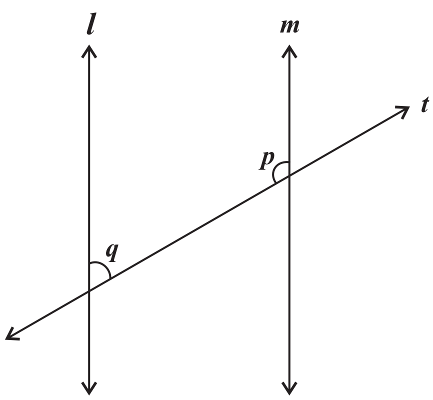
$y =$ ☐

$\therefore\ (x + 9y) =$ ☐ .... व्युत्क्रम कोन

$x + 9 \times$ ☐ $= 120$

$\therefore\ x =$ ☐

7) **आकृतीमध्ये, $\angle p = 109°$, $\angle q = 71°$ तर रेषा l व रेषा m समांतर आहेत; हे ठरविण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**



कृती :

$\angle p = 109°$ व $\angle q = 71°$

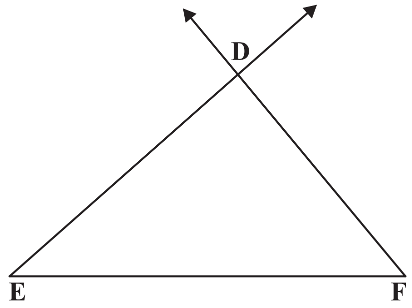
$\angle p + \angle q =$ ☐ + ☐

$\therefore\ \angle p + \angle q =$ ☐

$\therefore\ \angle p$ व $\angle q$ हे छेदिकेच्या एकाच बाजूस होणारे ☐ कोन असून त्यांची बेरीज ☐ आहे.

$\therefore$ रेषा $l \parallel$ रेषा m ... (☐)

8) **खाली दिलेल्या आकृतीमध्ये ΔDEF हा कोणताही एक त्रिकोण आहे. कोनमापकाच्या साहाय्याने ΔDEF च्या तीनही कोनांची मापे मोजा आणि त्रिकोणाच्या कोनांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म पडताळण्यासाठी खाली दिलेली प्रवाह आकृती पूर्ण करा.**



ΔDEF मध्ये

↓

$m\angle D =$ | $m\angle E =$ | $m\angle F =$

↓

$m\angle D + m\angle E + m\angle F =$ .... + ... + ...

↓

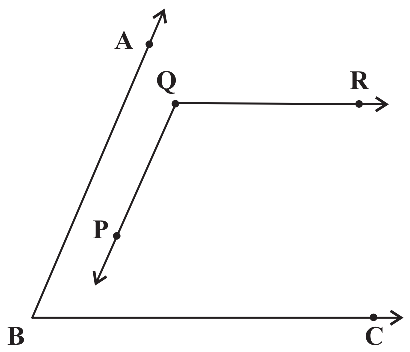
$m\angle D + m\angle E + m\angle F =$........

↓

त्रिकोणाच्या तीनही कोनांच्या मापांची बेरीज .... असते.

सरावासाठी उदाहरणे

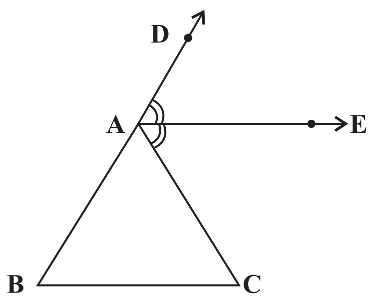
1)



आकृतीमध्ये रेषा BA ∥ रेषा QP आणि रेषा BC ∥ रेषा QR तर सिद्ध करा की,

$\angle ABC + \angle PQR = 180^{\circ}$

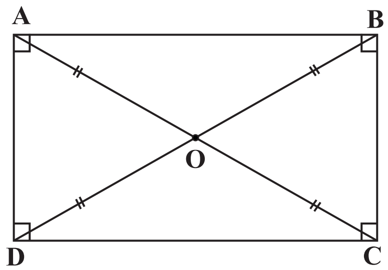
2)



आकृतीमध्ये किरण AE हा $\angle CAD$ चा कोनदुभाजक आहे. $\angle ABC \cong \angle ACB$ तर सिद्ध करा की, AE ∥ BC

3 त्रिकोण

1) खाली दिलेल्या आकृतीचे निरीक्षण करून खाली दिलेल्या प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



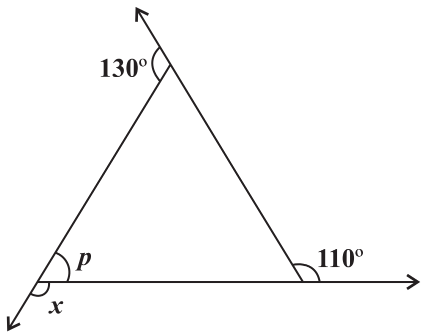
1) आकृतीमध्ये किती समद्विभुज त्रिकोण आहेत?

2) ΔAOB च्या दोन बाह्यकोनांची नावे लिहा.

3) ΔAOD व ΔCOB कोणत्या कसोटीने एकरूप होतील?

4) एकरूप त्रिकोणांच्या जोड्या

2) खाली दिलेल्या आकृतीवरून p ची किंमत काढण्यासाठी कृती पूर्ण करा.



कृती :

त्रिकोणाच्या तीनही बाजू एकाच दिशेने वाढविल्यास होणाऱ्या बाह्यकोनांची बेरीज [ ] असते.

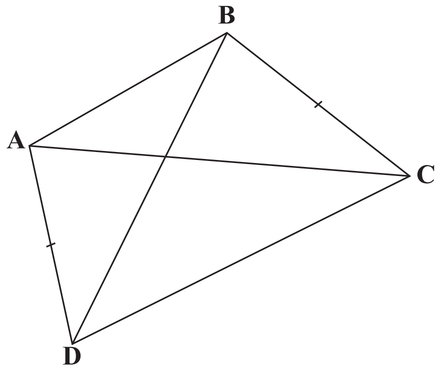
$\therefore\ 130° + 110° + x =$ [ ]

$\therefore\ x =$ [ ]

आता, $x + p = 180°$ .... ($\therefore$ [ ])

$\therefore\ p = 60°$

3) $\square$ABCD मध्ये, बाजू AD $\cong$ बाजू BC, $\angle DAB = \angle CBA$ तर सिद्ध करा $\triangle ABD \cong \triangle BAC$.



कृती : पक्ष :

$\square$ABCD मध्ये, बाजू AD $\cong$ बाजू BC व

$\angle DAB \cong \angle CBA$

साध्य: [ ]

सिद्धता : $\triangle ABD$ व $\triangle BAC$ मध्ये,

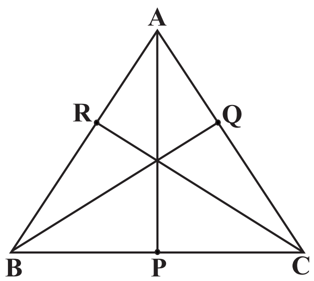
[ ] $\cong$ बाजू BC .... (पक्ष)

$\angle DAB \cong$ [ ] .... (पक्ष)

बाजू AB $\cong$ बाजू AB .... [ ]

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle BAC$ .... [ ]

4) खाली दिलेल्या आकृतीवरून सिद्ध करा की, समभुज त्रिकोणाच्या मध्यगा एकरूप असतात.



कृती :

पक्ष : $\triangle ABC$ हा समभुज त्रिकोण आहे, रेख AP, रेख BQ व CR या $\triangle ABC$ च्या मध्यगा आहेत.

साध्य : रेख AP $\cong$ रेख BQ $\cong$ रेख CR

सिद्धता : $\triangle$ ABC मध्ये,

$m\angle A = m\angle B = m\angle C =$ [ ] .... (I) (पक्ष)

AB = BC = AC .... [ ]

$\therefore$ $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AC$ .... ($\frac{1}{2}$ ने गुणून)

$\therefore$ BR = BP = QC .... (II) (पक्ष)

$\therefore$ $\triangle BCR$ व $\triangle BCQ$ मध्ये,

$\angle RBC \cong$ [ ] .... (I) वरून

बाजू [ ] $\cong$ बाजू QC .... (II) वरून

बाजू BC ≅ बाजू BC .... [ ]

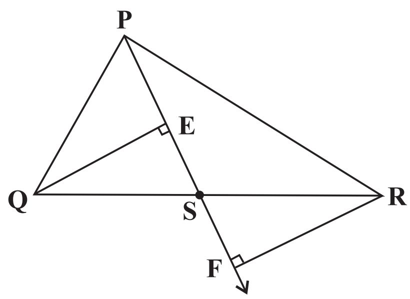
∴ Δ BCR ≅ Δ BCQ .... [ ]

∴ बाजू BQ ≅ बाजू CR .... (III) [ ]

त्याचप्रमाणे, बाजू BQ ≅ बाजू AP सिद्ध करता येईल .... (IV)

∴ रेख AP ≅ रेख BQ ≅ रेख CR .... [(III) व (IV) वरून]

5) Δ PQR मध्ये, रेख PS मध्यगा आहे. किरण PF असा आहे की, P - S - F, QE ⊥ PF, RF ⊥ PF तर सिद्ध करा. रेख QE ≅ रेख RF.



कृती :

पक्ष : Δ PQR मध्ये, Q-S-R, रेख QS ≅ रेख RS

रेख QE ⊥ किरण PF , रेख RF ⊥ किरण PF

साध्य : रेख QE ≅ रेख RF

सिद्धता : Δ QES व Δ RFS मध्ये,

[ ] ≅ रेख RS .... (पक्ष)

∠QES ≅ ∠RFS .... [( )]

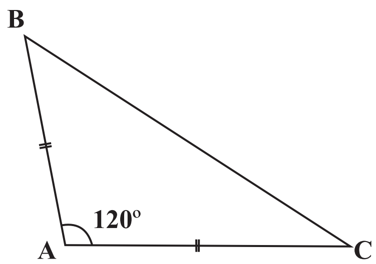
∠QSE ≅ [ ] (विरुद्ध कोन)

∴ ΔQES ≅ ΔRFS .... [ ]

∴ रेख QE ≅ रेख RF .... ( ) (एकरूप त्रिकोणाच्या संगत बाजू)

6) Δ ABC मध्ये $m\angle A = 120^\circ$ आणि बाजू AB ≅ बाजू AC तर $m\angle B$ = ?

कृती :



Δ ABC मध्ये,

बाजू AB ≅ बाजू AC .... (पक्ष)

∴ ∠ABC ≅ .... [ ] (समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)

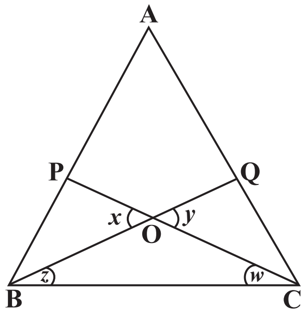
समजा $m\angle B = m\angle C = x$

$m\angle A + m\angle B + m\angle C =$ [ ] .... (त्रिकोणाच्या कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म)

∴ $120^\circ + x + x =$ [ ]

∴ $m\angle B = x =$ [ ]

7) **ΔABC मध्ये, बाजू AB $\cong$ बाजू AC, $m\angle POB = 2m\angle QBC$, $m\angle QOC = 2m\angle PCB$ तर सिद्ध करा. $\Delta BQA \cong \Delta CPA$.**



कृती :

पक्ष : ΔABC मध्ये, बाजू AB $\cong$ बाजू AC

$m\angle POB = 2m\angle QBC$ आणि $\angle QOC = 2m\angle PCB$

साध्य : $\Delta BQA \cong \Delta CPA$

सिद्धता : ABC मध्ये,

$m\angle POB = x$, $m\angle QOC = y$, $m\angle QBC = z$, $m\angle PCB = w$ मानू

$\therefore$ $x = 2z$
$y = 2w$ } —— $\because$.............

परंतु $x =$ ☐ .... (विरुद्ध कोन)

$\therefore 2z = 2w \therefore$ ☐ $= w$ .... (I)

आता, बाजू AB $\cong$ बाजू AC .... (पक्ष)

$\therefore$ $\angle ABC \cong \angle ACB$ .... (II) (समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)

$\therefore$ $m\angle ABC - z = m\angle ACB - w$ .... (II मधून I वजा करून)

$\therefore$ $m\angle ABQ = m\angle ACP$ .... (III) (कोनाच्या बेरजेचे गृहीतक)

ΔBQA व ΔCPA मध्ये,

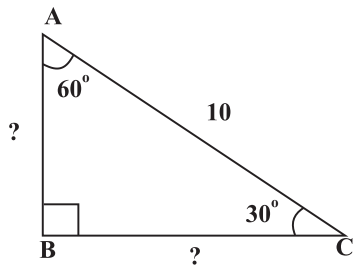
$\angle BAQ \cong \angle CAP$ .... ☐

$\angle ABQ \cong \angle ACP$ .... (III वरून)

बाजू ☐ $\cong$ बाजू ☐ .... (पक्ष)

$\therefore$ $\Delta BQA \cong \Delta CPA$ .... ☐ कसोटीने

8) **आकृतीचे निरीक्षण करून? असलेल्या बाजू शोधण्यासाठी खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.**



कृती :

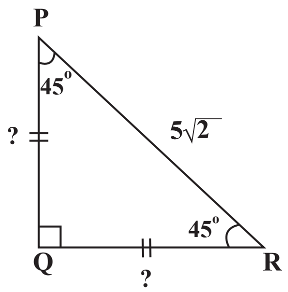
AB = □ × AC .... (30° कोनासमोरील बाजू)

AB = □ × □ = □

BC = □ × AC .... (60° कोनासमोरील बाजू)

∴ BC = □ × □ = □

9)

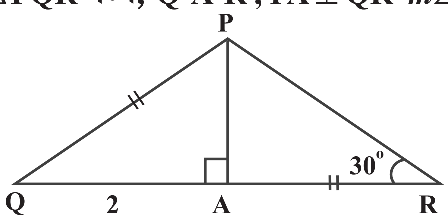


कृती :

PQ = QR = □ × PR .... (45° कोनासमोरील बाजू)

∴ PQ = QR = □ × □ = □

10) **ΔPQR मध्ये, Q-A-R , PA ⊥ QR $m\angle R = 30^\circ$, QA = 2, बाजू PQ ≅ बाजू AR तर PA = ?**



कृती :

ΔPAR मध्ये, $m\angle R = 30^\circ$ PA = x (मानू) $m\angle A = 90^\circ$

∴ $m\angle APR = 60^\circ$

∴ Δ PAR हा 30° - 60° - 90° त्रिकोण आहे.

∴ PA = □ × PR .... (30° कोनासमोरील बाजू)

∴ x = □ × PR

∴ PR = □

तसेच, AR = □ × PR (60° कोनासमोरील बाजू)

∴ AR = □ × □

∴ AR = PQ = □ .... (PQ ≅ AR दिले आहे)

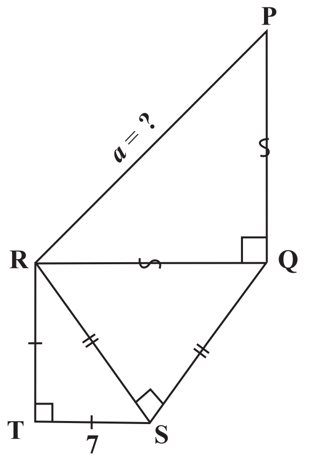
काटकोन ΔPQR मध्ये, पायथागोरस प्रमेयानुसार,

$PQ^2 = PA^2 + QA^2$

□ = $x^2 + (2)^2$

x^2 = □ ∴ x = □ ∴ PA = □ एकक

11) **खाली दिलेल्या आकृतीचे निरीक्षण करून *a* ची किंमत काढा.**



कृती :

ΔRST हा 45°- 45° - 90° त्रिकोण आहे. $\therefore$ TS = TR = 7

TS = ☐ × RS ...... (45° कोनासमोरील बाजू)

$\therefore$ ☐ = ☐ × RS .... (पक्ष)

$\therefore$ RS = ☐

$\therefore$ RS = SQ = ☐ .... (पक्ष)

ΔRQS हा 45° - 45° - 90° मापाचा त्रिकोण आहे.

$\therefore$ SQ = ☐ × RQ .... (45° कोनासमोरील बाजू)

☐ = ☐ × RQ

$\therefore$ RQ = ☐

$\therefore$ RQ = PQ = ☐ .... (पक्ष)

Δ PQR हा 45° - 45° - 90° मापाचा त्रिकोण आहे.

$\therefore$ RQ = ☐ × PR ....(45° कोनासमोरील बाजू)

$\therefore$ ☐ = ☐ × a

$\therefore$ a = ☐

12) **4 सेमी, 8 सेमी व 2 सेमी बाजू असलेला त्रिकोण काढता येईल का, ते सकारण लिहा?**
(टीप : दिलेल्या मापाच्या तीन काड्या घेऊन त्रिकोण तयार होतो का? याचा पडताळा घ्या.)

....

....

....

....

13) **जर त्रिकोणांच्या दोन बाजूंची लांबी 2 सेमी आणि 7 सेमी असेल तर, तिसऱ्या बाजूची लांबी किती असावी ते लिहा?**

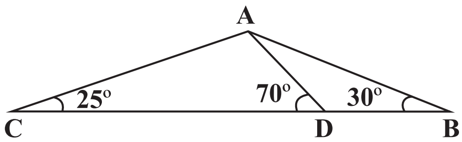
....

....

....

....

14) **आकृतीमध्ये $\angle ABD = 30^\circ$**
$\angle ADC = 70^\circ$, $\angle ACD = 25^\circ$
तर बाजू AC, बाजू BC व बाजू AB त्यांच्या लांबीच्या उतरत्या क्रमाने ' > ' चिन्ह वापरून सकारण लिहा.



....

....

....

15) **जर काटकोन त्रिकोणात कर्णाची लांबी 15 सेमी असेल, तर कर्णावर काढलेल्या मध्यगेची लांबी काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

कृती : काटकोन त्रिकोणात कर्णावर काढलेली मध्यगा ही कर्णाच्या [ ] असते.

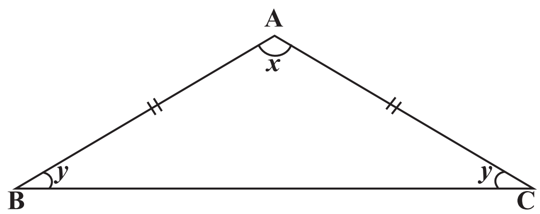
∴ मध्यगेची लांबी = [ ] × कर्ण = $\frac{15}{[\ ]}$ = [ ] सेमी

16) **समद्विभुज त्रिकोणात जर शिरोकोन हा पायालगतच्या कोनांच्या बेरजेच्या दुप्पट असेल, तर त्रिकोणाच्या सर्व कोनांची मापे काढा.**

कृती : ΔABC या समद्विभुज त्रिकोणात,

बाजू AB ≅ बाजू AC

समद्विभुज त्रिकोणात पायालगतचे कोन [ ] असतात.



$\therefore\ m\angle B = m\angle C = y°$ (मानू) व $m\angle A = x°$ मानू

दिलेल्या अटीनुसार,

$\therefore\ m\angle A = 2\,(m\angle B + m\angle C)\ =$

$x = 2\left(\square + \square\right) = \square$ .... (I)

$\therefore\ m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^{\circ}$ .... $(\square)$

$\therefore\ x + y + y = 180^{\circ}$

$\therefore\ x + 2y = 180^{\circ}$

$\therefore\ \square + 2y = 180^{\circ}$ .... (I) वरून

$\therefore\ \square = 180^{\circ}$

$\therefore\ y = \boxed{.........}$

पण $x = 4y$ .... (I) वरून

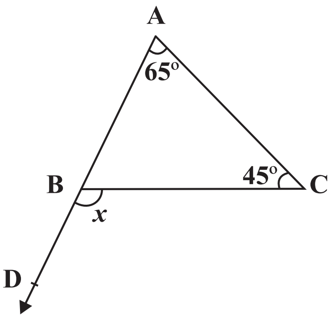
$\therefore\ x = \boxed{........}^{\circ}$

$\therefore\ \angle A = \boxed{........}^{\circ}$, $\angle B = \boxed{........}^{\circ}$, $\angle C = \boxed{........}^{\circ}$

$\therefore$ समद्विभुज त्रिकोणाच्या कोनांची मापे $\square$, $\square$, $\square$ आहेत.

17) सोबतच्या आकृतीवरून x ची किंमत काढण्यासाठी कृती पूर्ण करा.

कृती :



Δ ABC मध्ये,

$\angle A = \square$

$\angle C = \square$

$\angle DBC$ हा Δ ABC चा बाह्यकोन आहे.

$\therefore\ \angle DBC = \square + \square$ .... त्रिकोणाच्या दूरस्थ आंतरकोनाचा गुणधर्म

$\therefore\ x = \square + \square$

$\therefore\ x = \square$

18) 'एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्यांनी समाविष्ट न केलेला कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप असेल, तर ते दोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतीलच असे नाही.' या विधानाचे समर्थन करून लिहा.

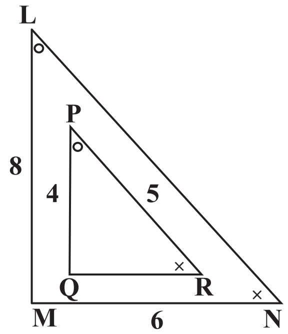
....

....

....

....

19) आकृतीमध्ये Δ LMN व Δ PQR दाखविले आहेत. आकृतीचे निरीक्षण करून ज्यांची लांबी दिलेली नाही त्या बाजूंची लांबी काढा.



कृती :

दिलेल्या माहितीनुसार, Δ LMN व Δ PQR मध्ये,

$\angle N \cong$ ☐

$\angle L \cong$ ☐

$\therefore \angle M \cong$ ☐ (दोन्ही त्रिकोणांचे उरलेले कोन)

$\therefore \Delta LMN \sim$ ☐

$\frac{LM}{PQ} = \frac{MN}{QR} = \frac{LN}{PR}$ ..... समरूप त्रिकोणांच्या बाजू प्रमाणात असतात.

$\therefore \frac{8}{4} = \frac{☐}{QR}$

$\therefore QR = \frac{4 \times ☐}{☐}$

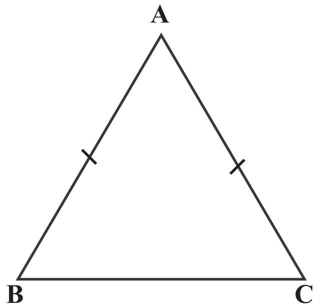
$\therefore QR =$ ☐

$\therefore \frac{8}{4} = \frac{LN}{☐}$

$\therefore LN = \frac{8 \times ☐}{4}$

$\therefore LN =$ ☐

20) ‘कोणत्याही समद्विभुज त्रिकोणात पायालगतचे कोन एकरूप असतात’ हे विधान सिद्ध करण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.



कृती :

पक्ष : Δ ABC मध्ये,

बाजू AB $\cong$ बाजू ☐

साध्य : $\angle ABC \cong \angle ACB$

सिद्धता : ΔABC व ΔACB मध्ये,

ABC $\longleftrightarrow$ ACB या एकास एक संगतीनुसार,

बाजू AB $\cong$ ☐

☐ $\cong$ बाजू AB

$\angle BAC \cong$ ☐

$\therefore$ Δ ABC $\cong$ Δ ACB .... ☐

$\therefore$ $\angle$ ABC $\cong$ $\angle$ ACB .... ☐

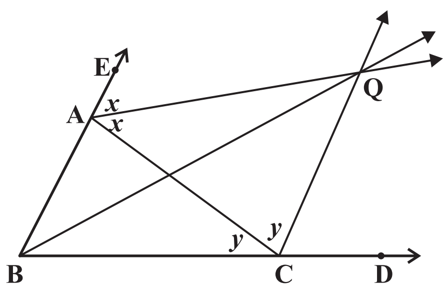
यावरून सिद्ध झाले की, ...

सरावासाठी उदाहरणे

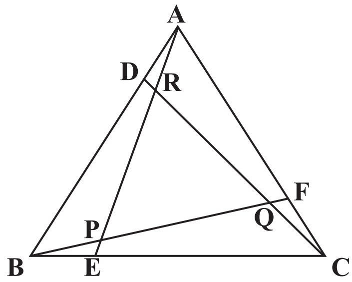
1) ΔABC चा $\angle$A हा विशालकोन आहे. बाजू AB व बाजू AC चे लंबदुभाजक बाजू BC ला अनुक्रमे बिंदू P व Q मध्ये छेदतात, तर सिद्ध करा AP + AQ + PQ = BC

2) रेख AD ही ΔABC ची मध्यगा आहे. तर सिद्ध करा AB + AC > 2AD

3) शेजारील आकृतीमध्ये, $\angle$EAC आणि $\angle$ACD हे ΔABC चे बाह्यकोन आहेत. $\angle$ACD व $\angle$EAC यांचे दुभाजक परस्परांना Q मध्ये छेदतात, तर किरण BQ हा $\angle$ABC चा दुभाजक आहे हे सिद्ध करा.



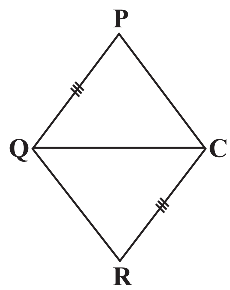
4) शेजारील आकृतीमध्ये ΔABC हा समभुज त्रिकोण आहे. $AD = BE = CF$ तर सिद्ध करा की, ΔPQR हा समभुज त्रिकोण आहे.



5) त्रिकोणाचे तीनही शिरोलंब जर एकरूप असतील तर सिद्ध करा की, तो त्रिकोण समभुज त्रिकोण असतो.

6) 'कोणत्याही समद्विभुज त्रिकोणात पायालगतचे कोन एकरूप असतात.' हे विधान त्रिकोणात कोणतीही रचना न करता सिद्ध करा.

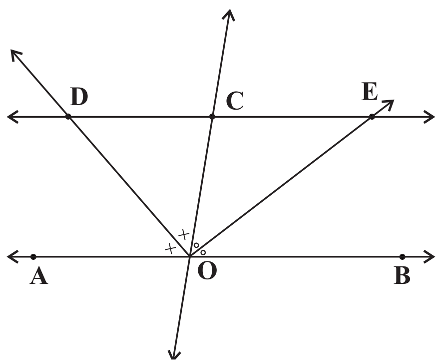
7) शेजारील आकृतीचे निरीक्षण करून ΔPQC व ΔRCQ हे एकरूप होण्यासाठी आणखी कोणते घटक एकरूप असणे आवश्यक आहेत? (सर्व शक्यता लिहा.)



8) ΔABC मध्ये, बिंदू D हा बाजू AC चा मध्यबिंदू आहे. तसेच $BD = \frac{1}{2} AC$ असेल, तर $\angle ABC$ हा काटकोन आहे हे सिद्ध करा.

9) बा-बा-बा कसोटीचा उपयोग करून बा-को-बा कसोटी सिद्ध करा.

10) शेजारील आकृतीमध्ये $\angle COA$ व $\angle COB$ हे रेषीय जोडीतील कोन असून अनुक्रमे किरण OD व किरण OE हे त्याचे कोनदुभाजक आहेत. तसेच रेषा DE || रेषा AB तर सिद्ध करा रेख $DC \cong$ रेख CE.



4 त्रिकोण रचना

1) बिंदू A व बिंदू B मधील अंतर 7.3 सेमी आहे, तर रेख AB चा मध्यबिंदू काढण्यासाठी रचना करा.

2) $\angle ABC = 75^{\circ}$ काढून $\angle ABC$ च्या कोनदुभाजकाची रचना करा.

3) ΔPQR असा काढा की, PQ = 3.4 सेमी, $m\angle Q = 60^{\circ}$, QR = 5 सेमी

4) खालील कृतींच्या पायऱ्यांनुसार रचना करा.

कृती : 1) 6 सेमी लांबीचा रेख BC काढा.

2) किरण BP असा काढा की, $m\angle CBP = 50^{\circ}$

3) केंद्र B आणि त्रिज्या 8.5 सेमी. घेऊन किरण BP ला छेदणारा कंस काढा. छेदनबिंदूला 'D' नाव द्या.

4) बिंदू C व बिंदू D जोडा. रेख CD चा लंबदुभाजक काढा. तो बाजू BD ला ज्या बिंदूत छेदेल तेथे 'A' नाव द्या.

5) बिंदू A आणि C जोडा.

5) ΔPQR असा काढा की, $PQ + QR + PR = 11.5$ सेमी, $m\angle Q = 70^{\circ}$ आणि $m\angle R = 60^{\circ}$

6) ΔXYZ मध्ये $YZ = 7$ सेमी, $m\angle XYZ = 45^\circ$ आणि $XY - XZ = 2.7$ सेमी, तर ΔXYZ ची रचना करा.

सरावासाठी उदाहरणे

1) काटकोन त्रिकोणाची अशी रचना करा की, पाया 6 सेमी आणि कर्ण व राहिलेल्या बाजूच्या लांबींची बेरीज 10 सेमी येईल.

2) ΔABC व $\Delta ABC'$ असे काढा की, $m\angle A = 50^\circ$, $AB = 7$ सेमी, $BC = BC' = 6$ सेमी.

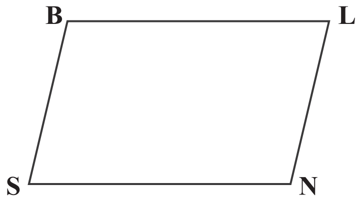
3) एका त्रिकोणाच्या कोनांच्या मापांचे गुणोत्तर $1:2:3$ असून त्याची परिमिती ही सर्वांत मोठ्या कोनाच्या $\frac{1}{10}$ पट आहे, तर इष्ट त्रिकोणाची रचना करा. रचनेचे स्पष्टीकरण लिहा.

4) 'एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्यांनी समाविष्ट न केलेला कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप असेल, तर ते दोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतीलच असे नाही.' यासाठी योग्य उदाहरण घेऊन रचना करा. रचनेचे स्पष्टीकरण लिहा.

5 चौकोन

1) आकृत्यांचे मापन करून खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.

i)



कृती :

l (BS) = ______ सेमी $\angle B$ = ______$^{\circ}$

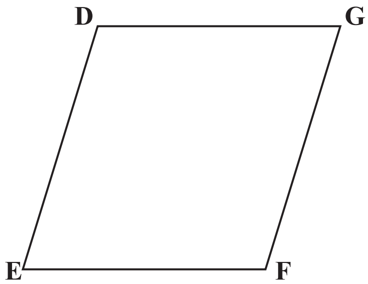
l (SN) = ______ सेमी $\angle S$ = ______$^{\circ}$

l (LN) = ______ सेमी $\angle N$ = ______$^{\circ}$

l (BL) = ______ सेमी $\angle L$ = ______$^{\circ}$

$\therefore$ □BSNL हा ______ चौकोन आहे.

ii)



कृती :

l (EF) = ______ सेमी $\angle F$ = ______$^{\circ}$

l (DE) = ______ सेमी $\angle E$ = ______$^{\circ}$

l (DG) = ______ सेमी $\angle D$ = ______$^{\circ}$

l (GF) = ______ सेमी $\angle G$ = ______$^{\circ}$

$\therefore$ □DEFG हा ______ चौकोन आहे.

2) मी कोणत्या प्रकारचा चौकोन आहे ते लिहा.

कृती :

i) माझ्या संमुख बाजूंची केवळ एकच जोडी परस्परांना समांतर असते. ______

ii) माझे कर्ण एकरूप असून परस्परांचे लंबदुभाजक आहेत. ______

iii) माझे सर्व कोन एकरूप असून कर्ण परस्परांना दुभागतात. ______

3) खाली दिलेली विधाने सत्य होण्यासाठी आवश्यक ती अट लिहा.

i) समांतरभुज चौकोन आयत असणे.

....

....

ii) आयत चौरस असणे.

....

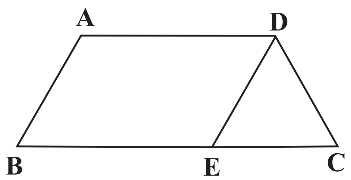
....

iii) समभुज चौकोन चौरस असणे.

....

....

4) □ABCD हा समद्विभुज समलंब चौकोन आहे.
बाजू AD ∥ बाजू BC आहे. ΔDEC हा समभुज त्रिकोण आहे.
□ABCD च्या सर्व कोनांची मापे काढण्यासाठी संजू आणि अंजू यांच्यातील संवाद पूर्ण करा.



कृती :

संजू : ΔDEC हा समभुज त्रिकोण आहे, तर त्याच्या प्रत्येक कोनाचे माप किती असेल?

अंजू : [ ]

संजू : म्हणजेच ∠C = [ ] आणि ∠EDC = [ ]

अंजू : □ABCD कोणत्या प्रकारचा चौकोन आहे?

संजू : □ABCD हा [....] आहे.

संजू : ∠C व ∠B हे समान मापाचे असतील का?

अंजू : नक्कीच आहेत.

संजू : तुला कारण सांगता येईल का?

अंजू : हो कारण [....]

संजू : बरोबर! त्रिकोणाच्या दूरस्थ आंतरकोनांच्या प्रमेयानुसार ∠BED = 120° होईल

अंजू : अगदी बरोबर; पण रेषीय जोडीतील कोनांचा गुणधर्म वापरूनदेखील ∠BED = 120° होईल ना?

संजू : हो, तुझे म्हणणेदेखील बरोबर आहे; पण ∠A चे माप कसे काढावे?

अंजू : $\angle A$ व $\angle B$ हे आंतरकोन आहेत, तसेच $\angle B = 60^\circ$ आहे.

संजू : थांब मी $\angle A$ चे माप सांगतो.

$\angle A =$ ☐

अंजू : $\angle ADC = 120^\circ$ आहे बघ बरं तुला माझे उत्तर बरोबर वाटते का?

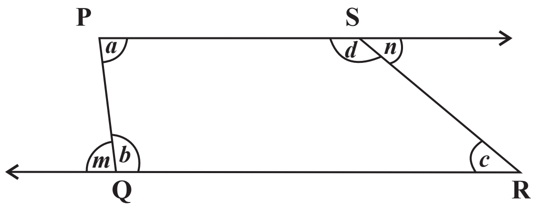
संजू : हो चौकोनाच्या सर्व कोनांच्या मापांची बेरीज ☐ असते.

$\therefore$ उर्वरित $\angle ADC = 120^\circ$ असणारच.

अंजू व संजू : $\angle A =$ ☐ , $\angle B =$ ☐

$\angle C =$ ☐ आणि $\angle ADC =$ ☐

5) शेजारील आकृतीतील माहितीच्या आधारे a + c = m + n दाखविण्यासाठी दिलेली कृती पूर्ण करा.



कृती :

□PQRS मध्ये, $a + b + c + d =$ ....

(I) चौकोनाच्या कोनांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म

$m + b = 180^\circ$ .... ☐

☐ $+ d = 180^\circ$ .... (II) रेषीय जोडीतील कोन

$\therefore\ m + b + n + d =$ ☐ $^\circ$ .... (III) वरून

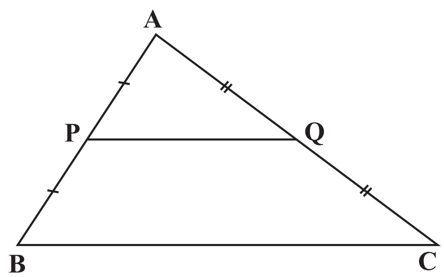
$\therefore\ a + b + c + d = m +$ ☐ $+ n + d$ .... (I) व (III) वरून

$\therefore\ m + n = a + c$

6) आकृतीत ΔABC च्या बाजू AB व AC चे अनुक्रमे बिंदू P व Q हे मध्यबिंदू आहेत, जर PQ = 5, तर BC ची लांबी काढण्यासाठी खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.

कृती :

त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या मध्यबिंदूच्या प्रमेयानुसार

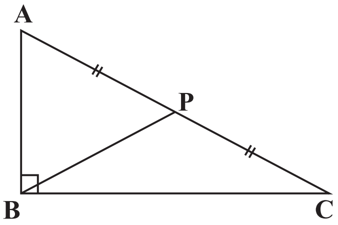


$PQ = \frac{1}{2} \times$ ☐

☐ $= \frac{1}{2} \times$ ☐

$BC =$ ☐

7) सोबतच्या आकृतीत ΔABC मध्ये, $m\angle B = 90^\circ$, AB = 6, BC = 8 तर रेख BP या मध्यगेची लांबी काढण्यासाठी खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.



कृती : काटकोन ΔABC मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार

$AB^2 + \square^2 = AC^2$

$\therefore \square^2 + \square^2 = AC^2$ .... किमती ठेवून

$\therefore AC^2 = \square$

$\therefore AC = \square$ .... वर्गमूळ काढून;

परंतु $BP = \frac{1}{2} \times \square$ .... काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णावरील मध्यगेचा गुणधर्म.

$\therefore BP = \square$

8) समांतरभुज चौकोन ABCD मध्ये, $\angle A = (2x - 30)^\circ$ व $\angle D = (2x + 10)^\circ$ तर $\angle B$ चे माप काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती :

ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

$\therefore \angle A + \angle D = \square$ .... आंतरकोन

$\therefore 2x - 30 + \square = \square$

$\therefore 4x = 200$

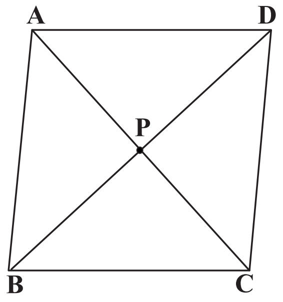
$\therefore x = \square$

$\therefore \angle D = \square^\circ$

$\therefore \angle B = \angle D$ .... संमुखकोन

$\therefore \angle B = \square^\circ$

9) **समभुज चौकोन ABCD मध्ये AC = 20 सेमी व BD = 48 सेमी, तर बाजू AB काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**



कृती :

समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे ______ असतात.

$AP = \frac{1}{2} \times$ ______ $=$ ______

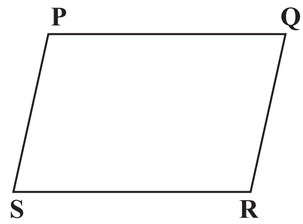
$BP = \frac{1}{2} \times$ ______ $=$ ______

काटकोन ΔAPB मध्ये पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार, $AB^2 = AP^2 + BP^2$

$AB^2 =$ ______ $+$ ______ $=$ ______

$\therefore AB =$ ______ सेमी .... वर्गमूळ काढून

10) **$\square$PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे. या चौकोनाची परिमिती 94 सेमी आहे. बाजू PS ची लांबी बाजू SR च्या लांबीपेक्षा 9 सेमी ने लहान आहे. तर त्या समांतरभुज चौकोनाच्या सर्व बाजूंची लांबी काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**



कृती :

$\square$PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.

$\therefore$ बाजू $PQ \cong$ बाजू RS
व बाजू $QR \cong$ बाजू SP } .... (I)

$\square$PQRS ची परिमिती = 94 सेमी आहे.

PQ = x सेमी मानू .... (II)

$\therefore$ QR = ______ − 9 .... (III)

$\square$ PQRS ची परिमिती = PQ + QR + ______ + ______

$\therefore$ 94 = PQ + QR + PQ + QR .... I वरून

$\therefore$ 94 = 2PQ + 2QR

$\therefore$ 94 = $2x + 2$ ______ .... II व III वरून

$\therefore$ 94 = $2x + 2x -$ ______

$\therefore 94 + \square = 4x$

$\therefore 4x = \square$

$\therefore x = \dfrac{\square}{4}$

$x = \square$ सेमी

$\therefore$ PQ = $\square$ सेमी

$\therefore$ RS = $\square$ सेमी

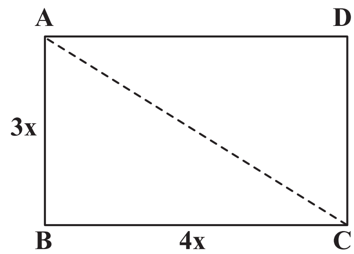
QR = $x - 9$

$\therefore$ QR = $\square$ − 9

$\therefore$ QR = $\square$ सेमी

$\therefore$ SP = $\square$ सेमी

11) **□ABCD हा आयत आहे. A (□ABCD) = 48 चौसेमी, AB = 3x सेमी, BC = 4x सेमी, तर कर्ण AC = ?**



कृती :

आयताची लांबी = BC

= $\square$ सेमी

आयताची रुंदी = AB

= $\square$ सेमी

आयत ABCD चे क्षेत्रफळ = $\square \times \square$

$\therefore 48 = \square \times \square$

$\therefore 48 = \square \times x^2$

$\therefore x^2 = \dfrac{\square}{\square}$

$\therefore x^2 = \square$

$x = \square$

∴ ☐ABCD ची लांबी = ☐ सेमी

∴ ☐ABCD ची रुंदी = ☐ सेमी

आता ΔABC मध्ये, $\angle ABC = 90^\circ$

∴ AC^2 = ☐ + ☐ पायथागोरसचा सिद्धांत

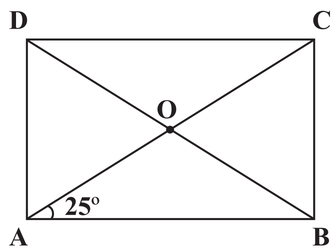
∴ AC^2 = ☐ + ☐

∴ AC^2 = ☐

∴ AC = ☐ वर्गमूळे घेऊन

12) आकृतीतील ☐ABCD हा आयत आहे. कर्ण AC व कर्ण BD हे परस्परांना O बिंदूत छेदतात.

$\angle OAB = 25^\circ$, तर $\angle OBA$ =?, $\angle COB$ = ?



कृती :

☐ABCD हा आयत आहे.

∴ कर्ण ☐ ≅ कर्ण BD

∴ AC = BD

∴ $\frac{1}{2}$ ☐ = $\frac{1}{2}$ ☐ ...... 2 ने भागून

∴ OA = ☐

∴ Δ AOB हा ☐ त्रिकोण हे सिद्ध झाले.

∴ $\angle OAB \cong \angle OBA$ .... (I)

परंतु $\angle OAB$ = ☐°

∴ $\angle OBA$ = ☐ ...... (I) वरून

∴ $\angle BOC$ हा Δ OAB चा बाह्यकोन आहे.

∴ $\angle BOC = \angle OAB$ + ☐

.... त्रिकोणाच्या दूरस्थ आंतरकोनांचा गुणधर्म

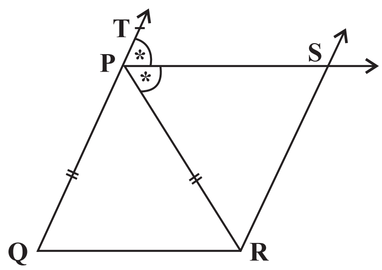
∴ $\angle BOC$ = ☐° + ☐°

$\angle BOC$ = ☐°

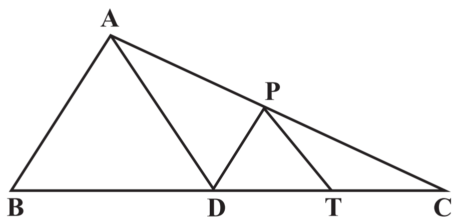
13) समांतरभुज चौकोन ABCD मध्ये $\angle A = (3x + 12)^\circ$ आणि $\angle B = (2x - 32)^\circ$ तर $\angle A$ चे माप काढा.

सरावासाठी उदाहरणे

1) ΔPQR मध्ये रेख $PQ \cong$ रेख PR. किरण PS हा $\angle TPR$ चा कोनदुभाजक आहे. रेख RS || रेख QP आहे, तर $\square PQRS$ हा समांतरभुज चौकोन आहे हे सिद्ध करा.



2) ΔABC ची रेख AD ही मध्यगा आहे.
रेख PD || रेख AB तसेच रेख PT || रेख AD,
तर सिद्ध करा. $TC = \frac{1}{4} \times BC$

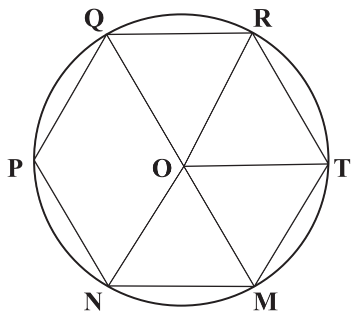


3) PQRS या समभुज चौकोनात जर $\angle QPS = 75^\circ$ तर $\angle PQR$ व $\angle SRQ$ यांची मापे किती?

6 वर्तुळ

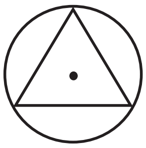
1) **खालील आकृतीमध्ये O हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदू आहे, तर आकृतीचे निरीक्षण करून सारणी पूर्ण करा.**

कृती :

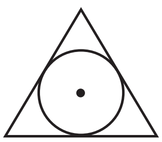


जीवा	
त्रिज्या	
केंद्रीय कोन	
सर्वांत मोठी जीवा	

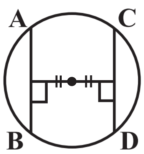
2) **खाली दिलेल्या आकृत्यांच्या आधारे रिकाम्या जागा भरा.**

कृती : a) 

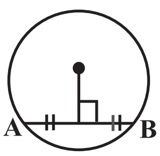
मी परिवर्तुळ आहे. माझी रचना करण्यासाठी त्रिकोणाच्या बाजूंचे [ ] काढावे लागतात.

b) 

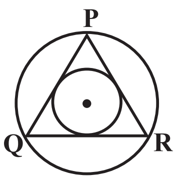
मी अंतर्वर्तुळ आहे. माझी रचना करण्यासाठी त्रिकोणाच्या कोनांचे [ ] काढावे लागतात.

c) 

आम्ही जीवा AB व जीवा CD आहोत. आम्ही वर्तुळकेंद्रापासून [ ] अंतरावर आहोत म्हणून आमची लांबी [ ] आहे.

d) 

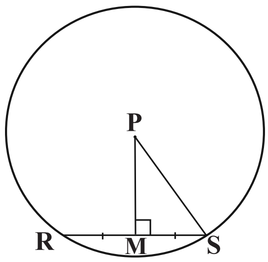
मी जीवा AB आहे. वर्तुळकेंद्रातून माझ्यावर काढलेल्या [ ] मुळे माझे दोन समान भाग होतात.

e) 

मी समभुज ΔPQR आहे. माझ्या परित्रिज्येचे माझ्या अंतर्वर्तुळाच्या त्रिज्येशी गुणोत्तर [ ] असते.

3) **एका वर्तुळाची त्रिज्या आणि जीवा समान लांबीच्या आहेत. वर्तुळाची त्रिज्या 10 सेमी असल्यास जीवेचे वर्तुळकेंद्रापासूनचे अंतर काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

कृती :



आकृतीमध्ये P वर्तुळकेंद्र असलेल्या वर्तुळामध्ये रेख PS ही त्रिज्या असून RS ही जीवा आहे.

दिलेल्या अटीनुसार, PS = RS = 10 सेमी.

वर्तुळाच्या केंद्रातून जीवेवर काढलेला लंब जीवेस दुभागतो.

रेख PM $\perp$ जीवा RS $\therefore \angle PMS = 90^{\circ}$

$\therefore$ RM = MS = [ ]

काटकोन ΔPMS मध्ये पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार : $PS^2 = PM^2 +$ [ ]

$10^2 = PM^2 + 5^2$

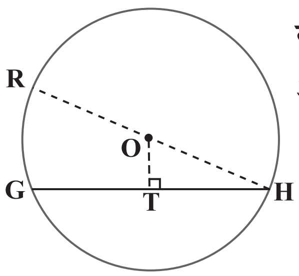
$PM^2 =$ [ ] $-$ [ ]

$PM^2 =$ [ ]

$\therefore PM = \sqrt{}$ [ ]

$\therefore$ वर्तुळकेंद्रापासून जीवा RS चे अंतर PM = [ ] सेमी आहे.

4) **O केंद्र असलेल्या एका वर्तुळाचा व्यास 34 सेमी आहे. त्या वर्तुळात जीवा GH वर्तुळकेंद्रापासून 8 सेमी अंतरावर आहे तर जीवेची लांबी काढण्यासाठी कृती पूर्ण करा.**



कृती :

आकृतीमध्ये O केंद्र असलेल्या वर्तुळाचा व्यास 34 सेमी आहे.

$\therefore$ वर्तुळाची त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times$ [ ] .... सूत्र

$= \frac{1}{2} \times 34$

= 17 सेमी

वर्तुळाच्या केंद्रातून जीवेवर काढलेला लंब जीवेला दुभागतो.

$\therefore \angle OTH = 90^{\circ}$, आणि रेख GT $\cong$ रेख [ ]

काटकोन ΔOTH मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$\boxed{} = OT^2 + TH^2$

$(17)^2 = \boxed{} + TH^2$

$\therefore 289 = 64 + TH^2$

$\therefore TH^2 = \boxed{}$

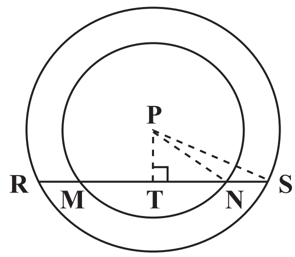
$\therefore TH = \boxed{}$

$\therefore GH = 2 \times TH$

$GH = \boxed{}$

$\therefore$ जीवा GH ची लांबी 30 सेमी आहे.

5) P केंद्र असलेल्या दोन एककेंद्री वर्तुळांच्या त्रिज्या 15 आणि 41 आहे. मोठ्या वर्तुळाची जीवा RS लहान वर्तुळाच्या जीवेस बिंदू M व बिंदू N मध्ये छेदते. जर MN = 24, तर NS काढण्यासाठी कृती पूर्ण करा.



कृती :

लहान वर्तुळामध्ये रेख PT $\perp$ जीवा MN काढा

वर्तुळाच्या केंद्रापासून जीवेवर काढलेला लंब जीवेला दुभागतो.

$\therefore MT = NT \quad \therefore NT = \boxed{}$

आकृतीत रेख PN काढला

काटकोन ΔPTN मध्ये,

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$PN^2 = PT^2 + NT^2$

$\boxed{} = PT^2 + 12^2$

$225 = PT^2 + 144$

$PT^2 = 81$

$\therefore PT = \boxed{}$

मोठ्या वर्तुळामध्ये रेख PT $\perp$ जीवा RS

आकृतीत रेख PS काढला

काटकोन ΔPTS मध्ये,

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$(PS)^2 = (PT)^2 + (ST)^2$

$(41)^2 = (9)^2 + ST^2$

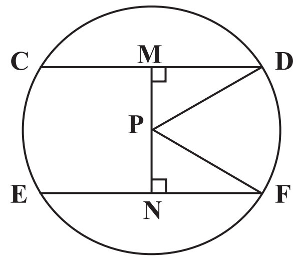
$ST^2 = \boxed{} - 81 = 1600$

$\therefore ST = 40$

आकृतीवरून NS $= ST - NT$ (S-N-T)

$NS = \boxed{}$

6) **खालील आकृतीमध्ये P वर्तुळकेंद्र असलेल्या वर्तुळामध्ये जीवा CD ≅ जीवा EF, तर ΔPMD ≅ ΔPNF हे सिद्ध करण्यासाठी कृती पूर्ण करा.**



कृती :

पक्ष : P केंद्र असलेल्या वर्तुळात जीवा CD ≅ जीवा EF असून

रचना : PM ⊥ जीवा CD आणि PN ⊥ जीवा EF काढले.

PF व PD रेषाखंड काढले.

साध्य : ΔPMD ≅ ΔPNF

सिद्धता : एकरूप जीवा वर्तुळकेंद्रापासून समान अंतरावर असतात.

∴ PM = [ ] .... (I)

PM ⊥ CD, PN ⊥ EF .... (रचना)

काटकोन ΔPMD व ΔPNF मध्ये,

कर्ण PD ≅ कर्ण [ ] .... (एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

रेख PM ≅ रेख [ ] .... (विधान (I) नुसार)

∴ ΔPMD ≅ ΔPNF .... [ ] कसोटीने

सरावासाठी उदाहरणे

1) ΔDEF मध्ये, DE = 5.4 सेमी, ∠FDE = 90° DF = 6 सेमी, तर ΔDEF काढून त्याचे परिवर्तुळ काढा.

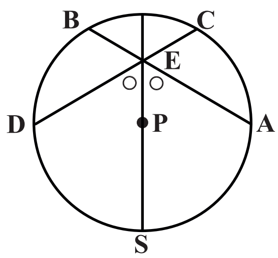
2) ΔKLN मध्ये KL = 6 सेमी, LN = 6.4 सेमी आणि NK = 7.8 सेमी, तर ΔKLN चे परिवर्तुळ काढा.

3) ΔPQR मध्ये ∠Q = 95°, ∠R = 55°, QR = 6.2 सेमी, तर ΔPQR चे अंतर्वर्तुळ काढा.

4) मी 7.5 सेमी बाजू असलेला समभुज त्रिकोण आहे. माझे परिवर्तुळ व अंतर्वर्तुळ काढा. परिवर्तुळाची व अंतर्वर्तुळाची त्रिज्या मोजा आणि त्यांचे गुणोत्तर काढा.

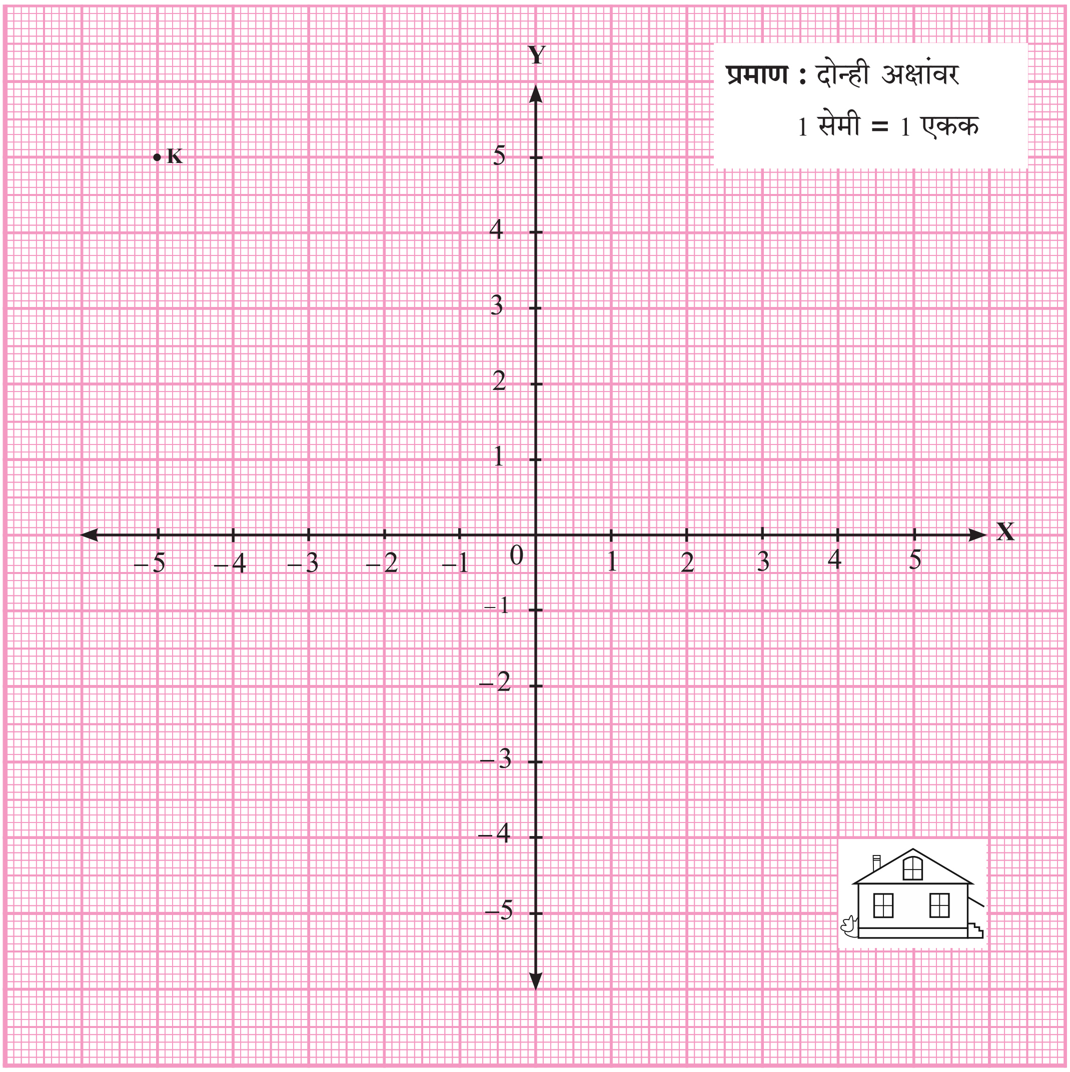
5) 7 सेमी त्रिज्येच्या वर्तुळाची जीवा वर्तुळकेंद्रापासून 4 सेमी अंतरावर असेल, तर जीवेची लांबी काढा.

6) सोबतच्या आकृतीमध्ये P हे वर्तुळाचे केंद्र असून जीवा AB आणि जीवा CD परस्परांना व्यासावरील बिंदू E मध्ये छेदतात जर ∠AEP ≅ ∠DEP, तर सिद्ध करा. AB = CD



7 निर्देशक भूमिती

1) आलेखावरून खाली दिलेल्या रिकाम्या जागा पूर्ण करा.



1) X अक्ष व Y अक्ष यांच्या छेदनबिंदूला काय म्हणतात? ______

2) दोन अक्ष परस्परांना छेदल्यामुळे किती चरण तयार होतात? ______

3) आकृतीमधील घराचे स्थान कोणत्या चरणात आहे? ______

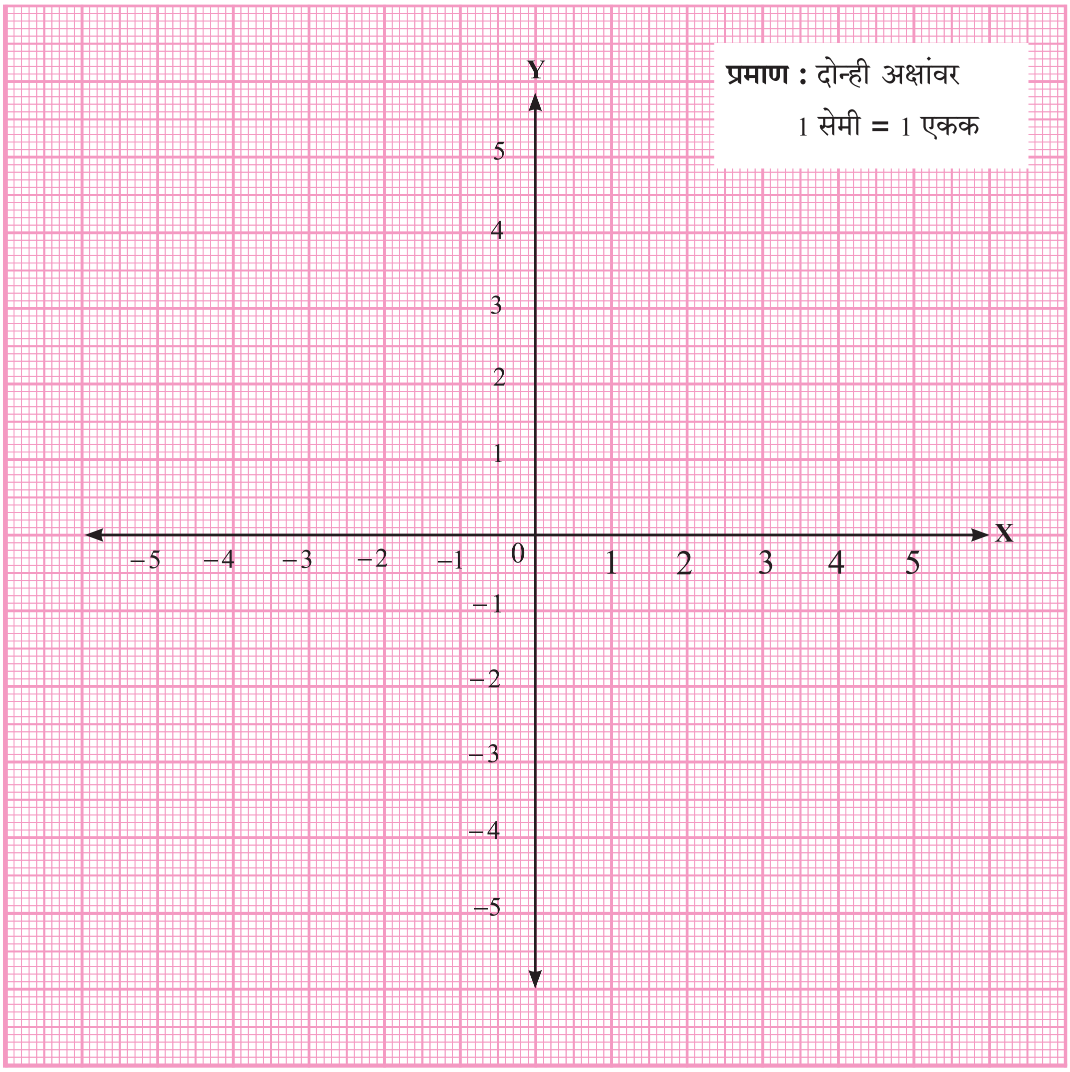
4) दोन अक्षांच्या छेदनबिंदूपाशी तयार होणारे कोन. ______

5) बिंदू K कोणत्या चरणात आहे? ______

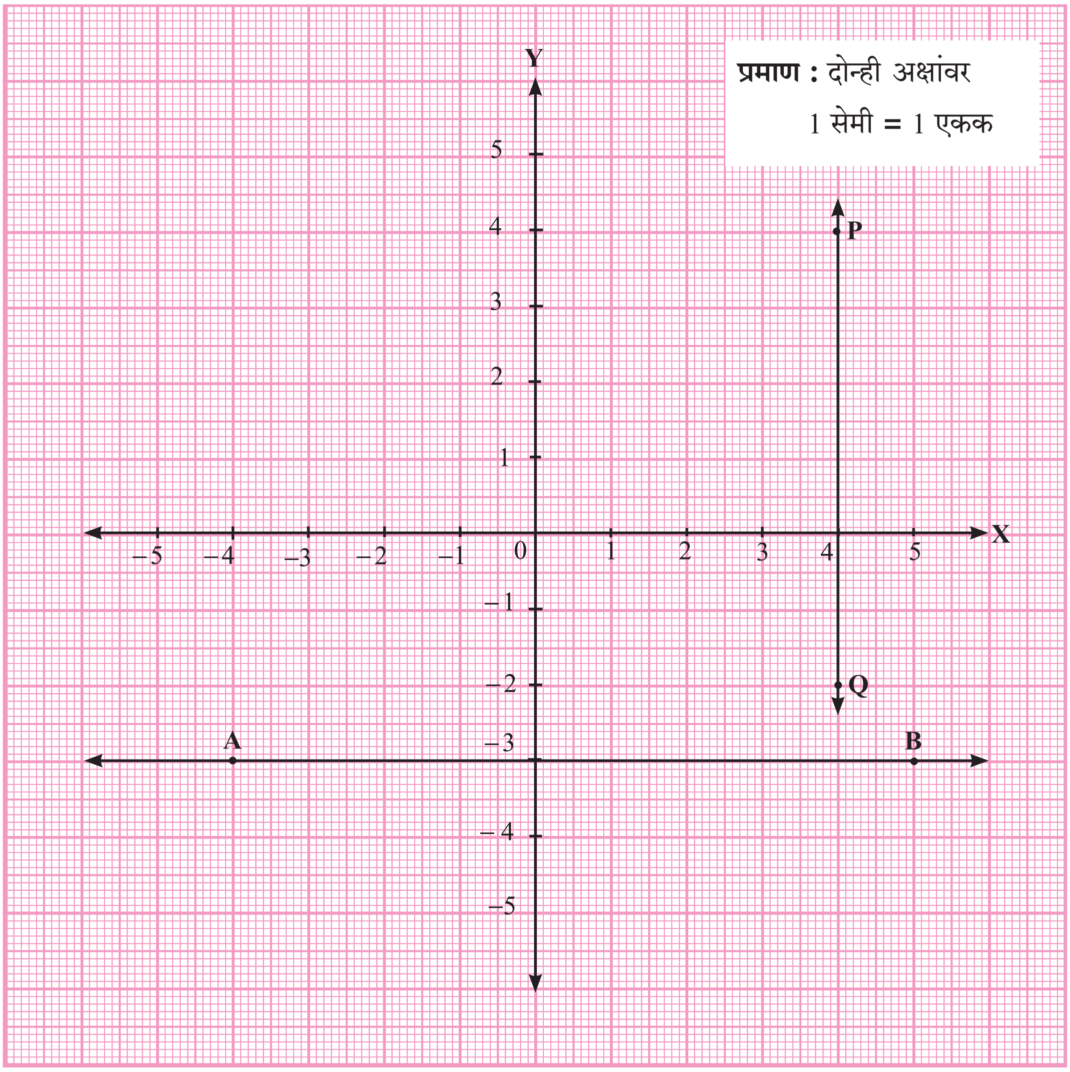
6) बिंदू K चा x निर्देशक ☐ व y निर्देशक ☐ आहे ते K (☐, ☐) असे लिहितात.

2) खालील बिंदू कोणत्या चरणात किंवा अक्षावर आहेत ते चौकटीत लिहा व ते बिंदू आलेख कागदावर स्थापन करा.

बिंदू	A (3,4)	B (O, – 4)	C (– 4, 3)	D (– 5, – 2)	O (0, 0)	E (3, – 2)	F (3, 0)
स्थान							



3) **सूचनेप्रमाणे खालील कृती पूर्ण करा.**



कृती :

1) रेषा AB चे समीकरण लिहा. ☐

2) $y = 3$ या समीकरणाचा आलेख काढा. या रेषेवरील सर्व बिंदूंचा कोणता निर्देशक समान आहे? ☐

3) $x = -4$ या समीकरणाचा आलेख काढा. या रेषेवरील सर्व बिंदूंचा कोणता निर्देशक समान आहे? ☐

4) Y - अक्षापासून उजवीकडे 2 एकक अंतरावर Y अक्षाला समांतर रेषा काढा.

5) X - अक्षाला समांतर असणाऱ्या रेषेचे समीकरण ☐

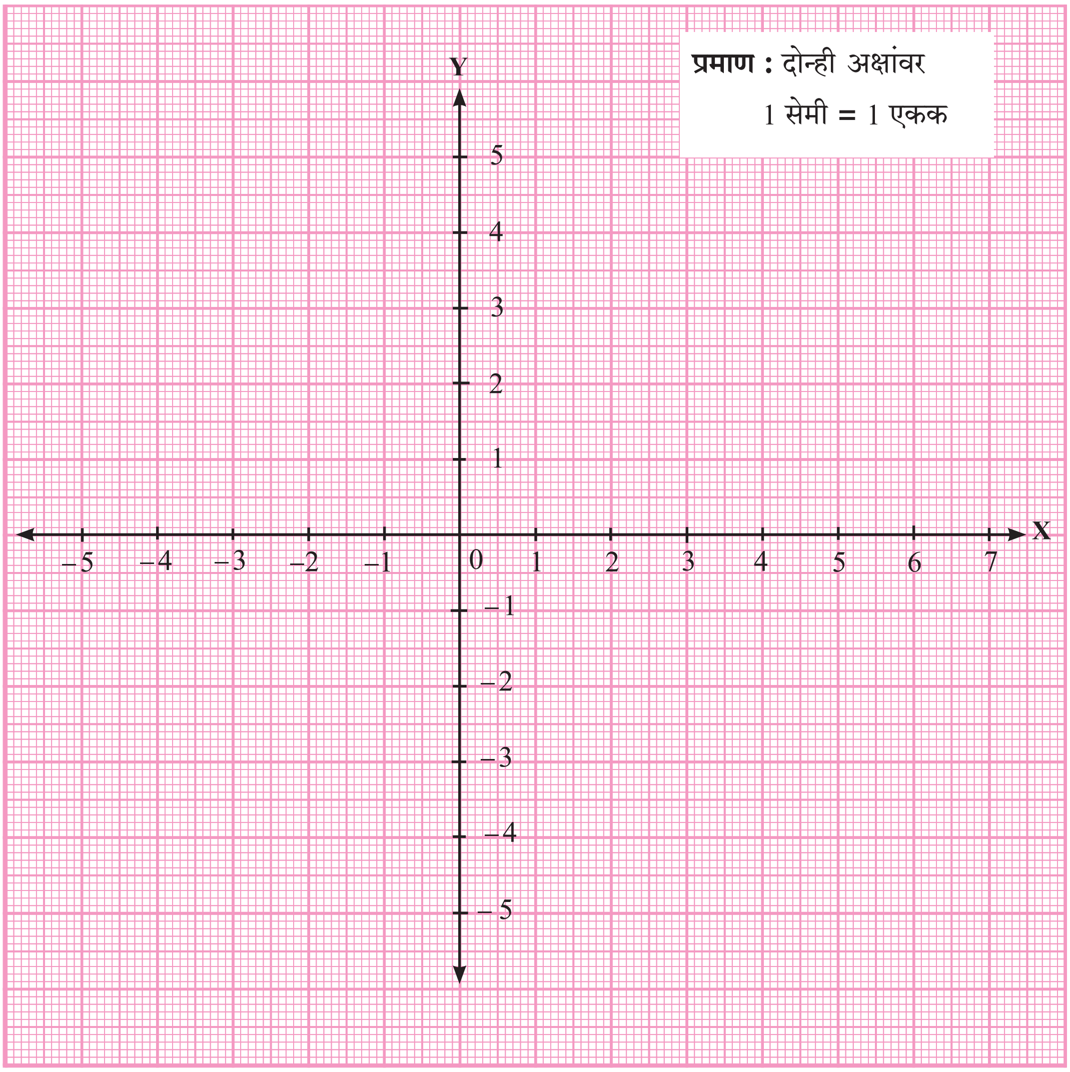
6) Y - अक्षाला समांतर असणाऱ्या रेषेचे समीकरण ☐

7) X व Y अक्षाचे समीकरणे अनुक्रमे ☐ व ☐ आहेत.

8) $y = 4$ हे कोणत्या रेषेचे समीकरण आहे? ☐

4) $x = -3$ आणि $y = 4$ या दोन समीकरणांचे आलेख काढा. त्यांच्या छेदनबिंदूचे निर्देशक $(-3, 4)$ आहेत का? याचा पडताळा घ्या. त्यावरून $y = 2$ आणि $x = -5$ या समीकरणांच्या छेदनबिंदूचे निर्देशक प्रत्यक्ष आलेख न काढता लिहा.

कृती :



- $y = 2$ आणि $x = -5$ या रेषालेखाच्या छेदनबिंदूचे निर्देशक (☐ , ☐) आहेत.

5) **एकाच निर्देशक पद्धतीवर पुढील समीकरणांचे आलेख काढा.**

i) $x + 2 = 0$ ii) $3y = 6$

iii) $4x - 16 = 0$ iv) $5y + 15 = 0$

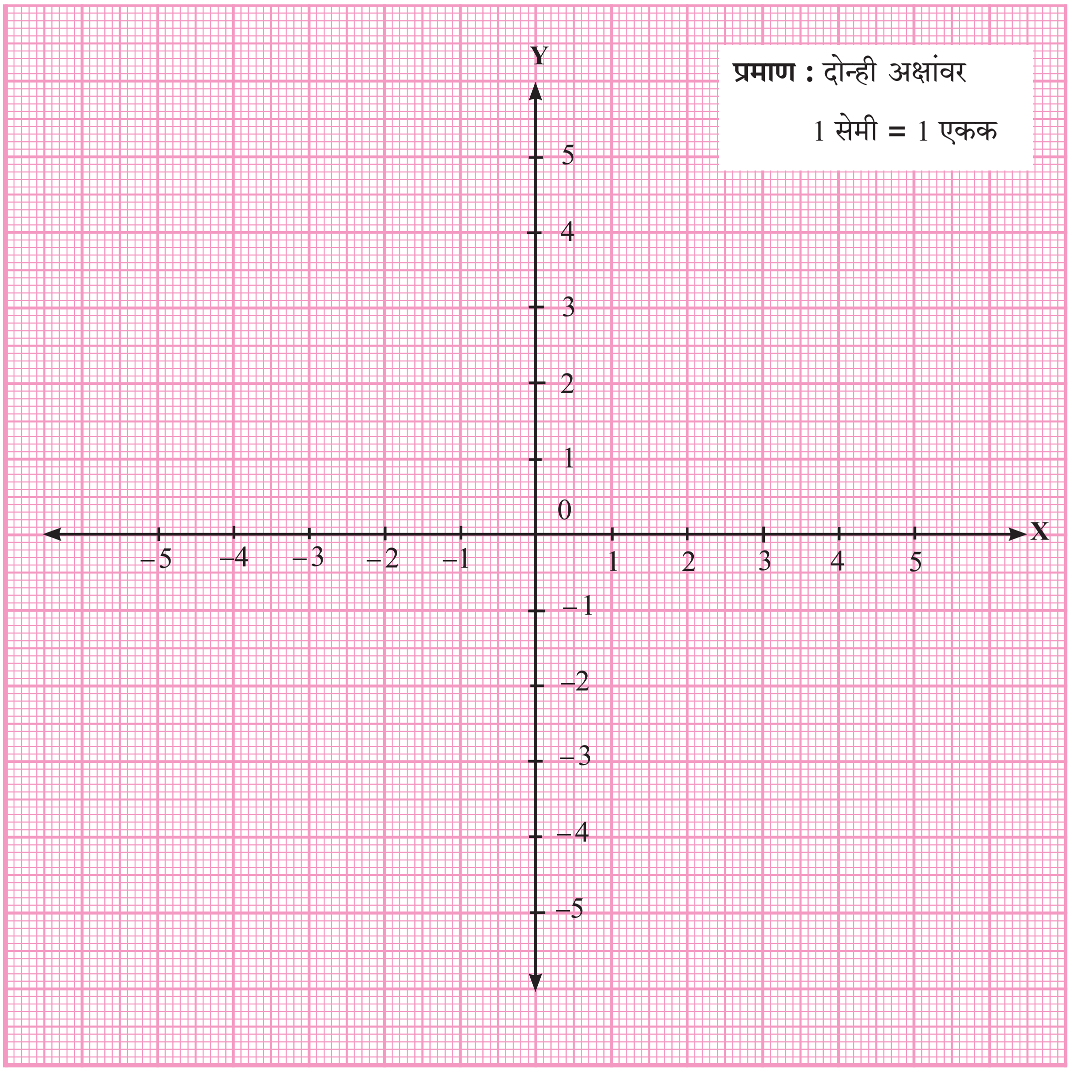
कृती :

प्रमाण : दोन्ही अक्षांवर

1 सेमी = 1 एकक

6) **आलेख कागदावर P (– 2, 3), Q (– 3, – 2), R (3, – 3) हे बिंदू स्थापन करा. सर्व बिंदू परस्परांना जोडून तयार होणाऱ्या भौमितिक आकृतीचे नाव लिहा.**

कृती :



भौमितिक आकृतीचे नाव : ....

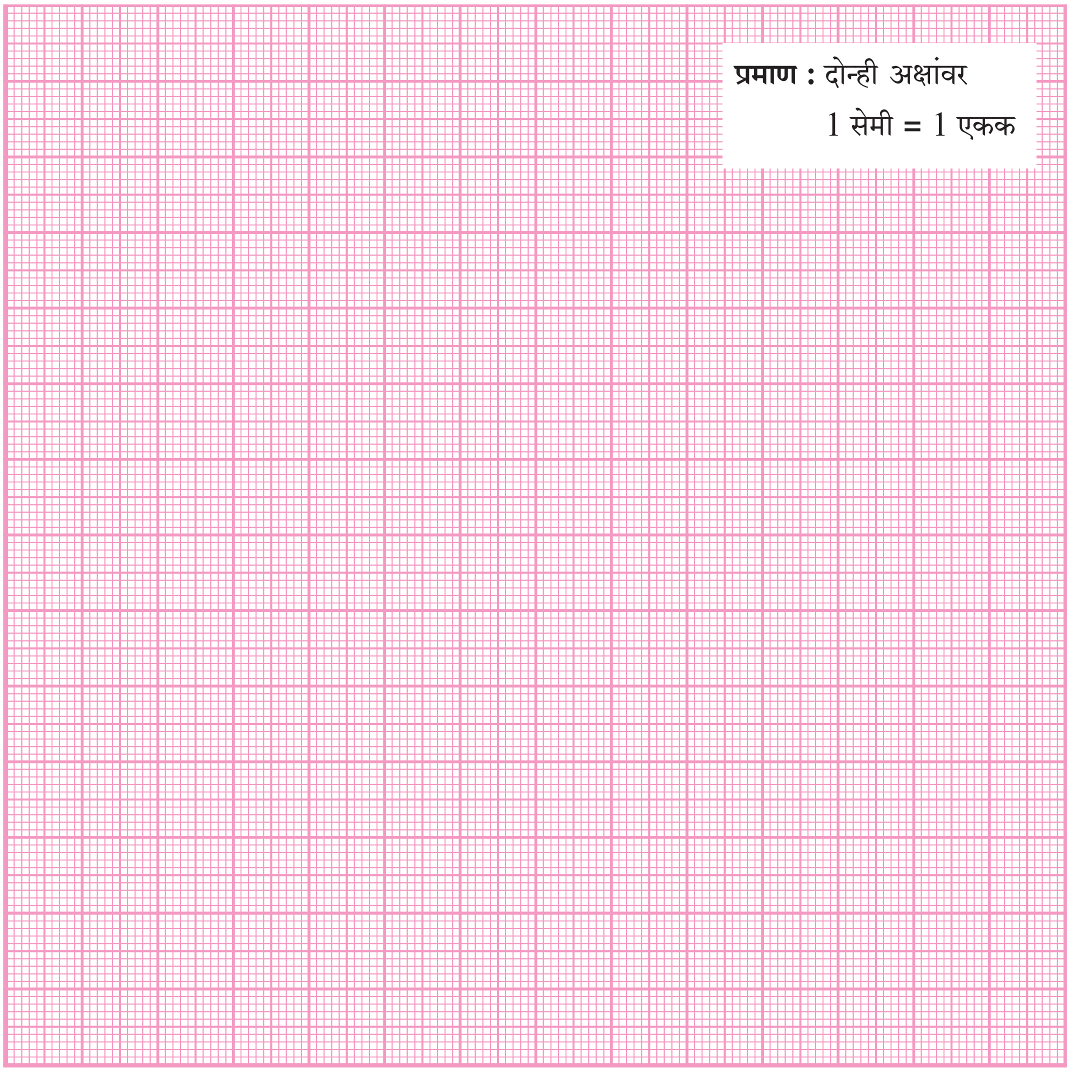
7) **खाली दिलेली सारणी पूर्ण करून दिलेल्या समीकरणांचे आलेख काढा.**

i) $2x + y - 2 = 0$ ii) $x + y = 6$

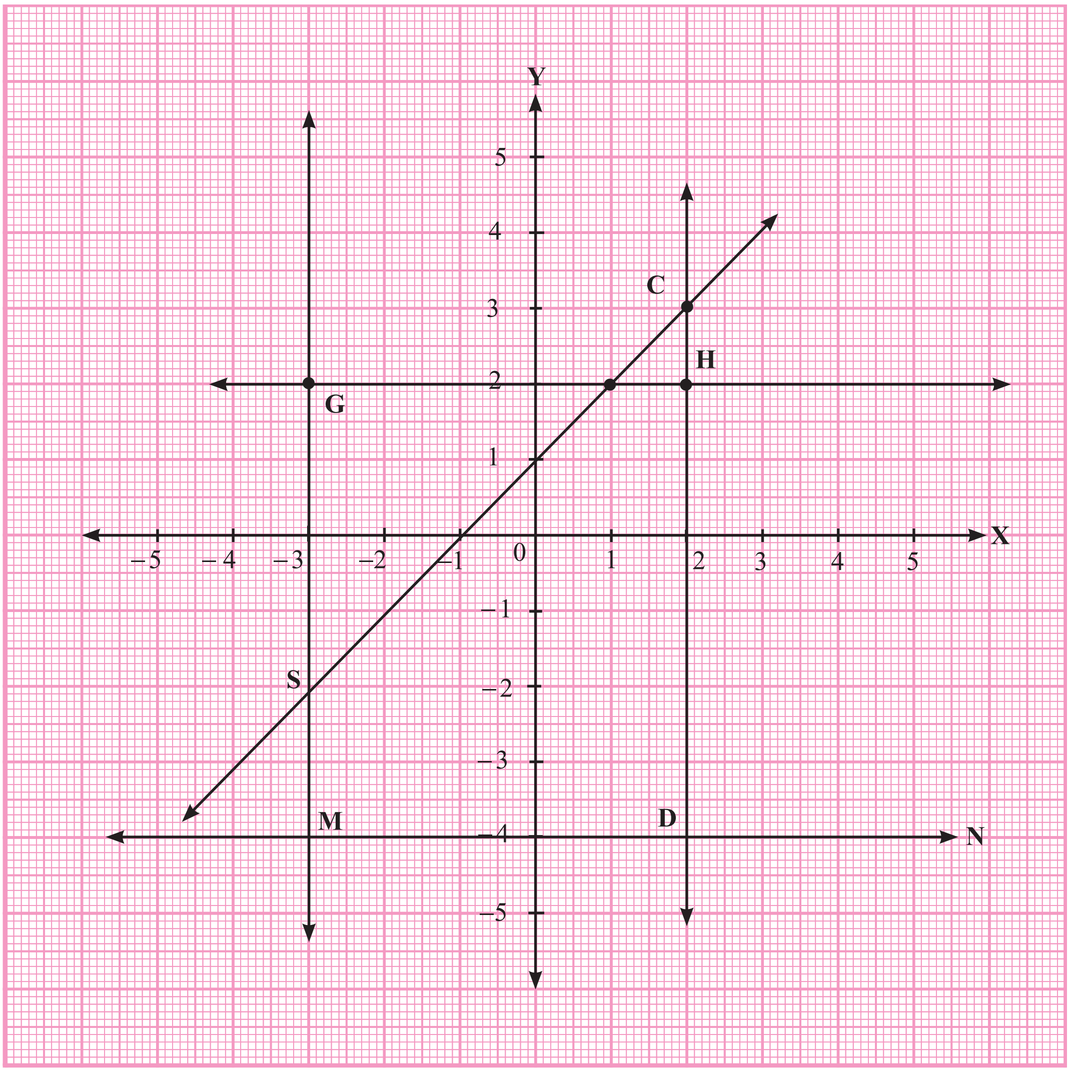
कृती :

x	0	3	
y	2		6
(x, y)	(0,2)	(,)	(,)

x			
y			
(x, y)			



8) **खाली दिलेल्या आलेखावरून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.**



कृती :

1) $y = -4$ हे कोणत्या रेषेचे समीकरण [ ]

2) रेषा GH चे समीकरण [ ]

3) रेषा CD आणि GH यांच्या छेदनबिंदूचे निर्देशक [ ]

4) रेषा MG ही Y- अक्षापासून कोणत्या बाजूला किती एकक अंतरावर आहे?

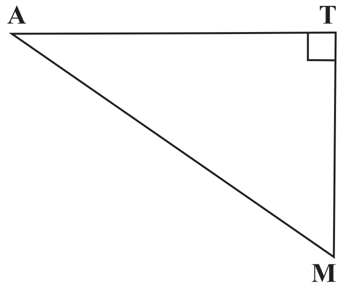
[ ] बाजूला, [ ] अंतरावर

5) रेषा SC ही X - अक्षाला व Y - अक्षाला ज्या बिंदूंमध्ये छेदते त्या बिंदूंचे निर्देशक

[S (,)] , [ ]

8 त्रिकोणमिती

1) खाली दिलेल्या आकृतीचे निरीक्षण करून कृती पूर्ण करा.



कृती :

1) ΔATM मध्ये $m\angle T=$ ☐

2) कर्णाचे नाव ☐

3) काटकोन करणाऱ्या बाजू ☐ व ☐

4) $\angle A$ समोरील बाजू ☐

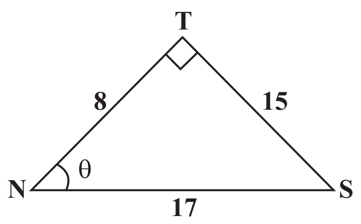
5) $\angle A$ लगतची बाजू ☐

6) $\angle M$ समोरील बाजू ☐

7) $\angle M$ लगतची बाजू ☐

8) $\angle A + \angle M =$ ☐ $^{\circ}$

2) काटकोन ΔNTS मध्ये, $\angle N = \theta$ असेल, तर खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.



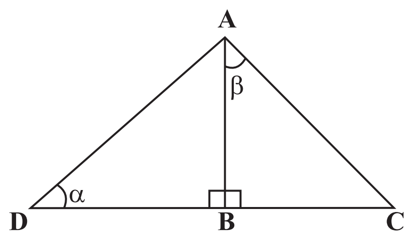
कृती :

a) $\sin\theta = \dfrac{\text{समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{TS}{\square} = \dfrac{15}{\square}$

b) $\cos\theta = \dfrac{\text{.......... बाजू}}{\text{.......... बाजू}} = \dfrac{\square}{NS} = \dfrac{\square}{17}$

c) $\tan\theta = \dfrac{\text{.......... बाजू}}{\text{.......... बाजू}} = \dfrac{\square}{TN} = \dfrac{\square}{8}$

3) आकृतीमध्ये, रेख AB $\perp$ बाजू DC, $\angle ADB = \alpha$ व $\angle BAC = \beta$ तर, खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.



कृती :

ΔABC मध्ये, $\angle ABC = 90^{\circ}$,

$\angle BAC = \beta \therefore \angle BCA =$ ☐

ΔABD मध्ये, $\angle ABD = 90^{\circ}$

$\angle ADB = \alpha \therefore \angle DAB =$ ☐

a) $\sin\alpha = \frac{\square}{\square}$ b) $\cos\beta = \frac{\square}{\square}$ c) $\tan\beta = \frac{\square}{\square}$

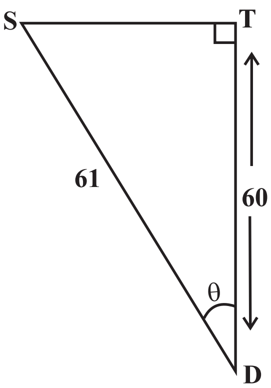
d) $\sin(90-\beta) = \frac{\square}{\square}$ e) $\cos(90-\alpha) = \frac{\square}{\square}$ f) $\tan(90-\alpha) = \frac{\square}{\square}$

g) $\cos\alpha = \frac{\square}{\square}$ h) $\tan\alpha = \frac{\square}{\square}$

i) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\square}{\square}}{\frac{\square}{\square}} = \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ $\boxed{\therefore \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha}$

4) ΔSTD मध्ये, $\angle T = 90$, $\angle D = \theta$ जर SD = 61, TD = 60 तर, खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.

कृती :



काटकोन ΔSTD मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$(SD)^2 = (ST)^2 + \square$

$(61)^2 = (ST)^2 + (\;\;)^2$

$\therefore ST^2 = \square = ST^2 + 3600$

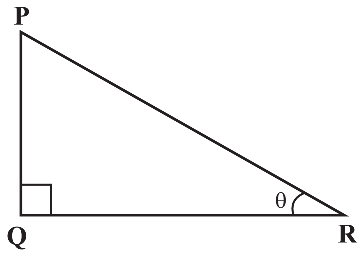
$\therefore ST^2 = \square - \square$

$\therefore ST^2 = \square$

$\therefore ST = \square$ .... (वर्गमूळ घेऊन)

a) $\therefore \sin\theta = \frac{\square}{\square}$ b) $\therefore \cos\theta = \frac{\square}{\square}$ c) $\therefore \tan\theta = \frac{\square}{\square}$

5) **आकृतीचे निरीक्षण करून, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ या नित्यसमानतेचा पडताळा घेण्यासाठी खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.**



कृती :

काटकोन ΔPQR मध्ये, $\sin\theta = \dfrac{\square}{\square}$ .... (1)

$\cos\theta = \dfrac{\square}{\square}$ .... (2)

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$\square + \square = PR^2$

प्रत्येक पदाला PR^2 ने भागून

$\dfrac{\square}{PR^2} + \dfrac{\square}{PR^2} = \dfrac{PR^2}{PR^2}$

$\therefore \left(\dfrac{PQ}{PR}\right)^2 + \left(\dfrac{QR}{PR}\right)^2 = \square$ .... (3)

$\therefore (\sin\theta)^2 + \square = 1$ .... (1), (2) व (3) वरून

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

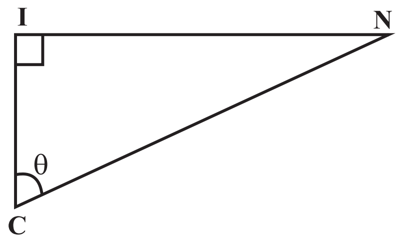
हे लक्षात ठेवूया :

$(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$

$(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$

$(\tan\theta)^2 = \tan^2\theta$

6) **काटकोन ΔNIC मध्ये, $\angle I = 90^\circ$, जर $\cos\theta = \dfrac{7}{25}$ तर $\sin\theta$ व $\tan\theta$ ही गुणोत्तरे काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**



कृती :

ΔNIC मध्ये, $\angle I = 90^\circ$, $\angle C = \theta$,

$\cos\theta = \dfrac{7}{25}$

$\therefore \dfrac{\square}{CN} = \dfrac{7}{25}$

$\therefore CI = 7k$ आणि $\square = 25k$ मानू

$\therefore$ पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$\therefore CN^2 = (NI)^2 + \square$

$\therefore (25\,k)^2 = \square + (7k)^2$

$\therefore \; \square = (NI)^2 + \square$

$\therefore \; NI^2 = \square$

$\therefore$ NI = 24k .... (वर्गमूळ घेऊन)

$\therefore \; \sin\theta = \dfrac{\square}{CN} = \dfrac{24k}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$

$\therefore \; \tan\theta = \dfrac{IN}{\square} = \dfrac{\square}{7k} = \dfrac{\square}{\square}$

7) $\dfrac{4\cos^2 60^\circ + 4\sin^2 60^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ}$ **ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

कृती :

त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या सारणीवरून,

$\cos 60^\circ = \square$; $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 45^\circ = \square$

$$\frac{4\cos^2 60^\circ + 4\sin^2 60^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ}$$

$$= \frac{4 \times \square + 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \square}{\square + \square}$$

$$= \frac{1 + \square - \square}{\square}$$

$$= \square$$

8) $5\left[\dfrac{\sin 58^\circ}{\cos 32^\circ}\right] - 2\left[\dfrac{\cos 48^\circ}{\sin 42^\circ}\right]$ **ची किंमत काढण्यासाठी खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.**

कृती :

दिलेली राशी $= 5\left[\dfrac{\sin 58^\circ}{\sin(\boxed{\ldots\ldots - \ldots\ldots})^\circ}\right] - 2\left[\dfrac{\cos 48^\circ}{\cos(90-42)^\circ}\right]$

$= 5\left[\dfrac{\sin 58^\circ}{\boxed{}}\right] - 2\left[\dfrac{\cos 48^\circ}{\cos 48^\circ}\right]$

$= 5 \times \boxed{} - 2 \times \boxed{} = \boxed{}$

सरावासाठी उदाहरणे

1) जर $\sin A + \cos A = \sqrt{2}$ तर, $\cos A$ व $\tan A$ ची किंमत काढा.

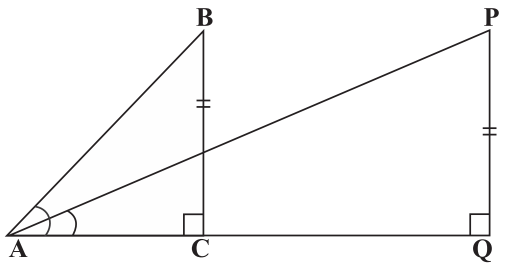
2) जर $5\tan\theta - 4 = 0$, तर $\dfrac{5\sin\theta - 4\cos\theta}{5\sin\theta + 4\cos\theta}$ ची किंमत काढा.

3) आकृतीमध्ये $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle PAQ = 30^\circ$, $BC = PQ = 40$ सेमी तर,

i) AC = ?

ii) AQ = ?

iii) CQ = ?



4) जर $\sin 2A = \cos 7A$ तर $\sin^2 6A + \cos^2 9A$ ची किंमत काढा.

9 पृष्ठफळ आणि घनफळ

1) **खाली दिलेली विधाने वाचा व त्यावरून पृष्ठफळ काढायचे की घनफळ काढायचे ते लिहा.**

कृती :

अ. क्र.	विधाने	घनफळ/पृष्ठफळ
1.	पाण्याच्या टाकीमध्ये किती लीटर पाणी मावेल ?	
2.	भिंतींना रंग देण्यासाठी काय काढावे लागेल ?	
3.	खोक्यामध्ये बिस्किटांचे किती पुडे बसतील ?	
4.	कार्डशीटपासून शंक्वाकृती आकाराच्या किती टोप्या बनविता येतील ?	
5.	लोखंडी सळईचे वजन किती असेल ?	

2) **एका घनाचे घनफळ हे त्याच्या एकूण पृष्ठफळाइतके आहे, तर त्या घनाची बाजू किती हे शोधण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.**

कृती :

घनाचे घनफळ = ☐ तसेच त्या घनाचे एकूण पृष्ठफळ = ☐

परंतु दिलेल्या अटीनुसार, घनाचे घनफळ = घनाचे एकूण पृष्ठफळ

$\therefore$ ☐ = ☐ $\therefore$ घनाची बाजू = ☐

3) **खालील सारणीत इष्टिकाचितींची मापे दिलेली आहेत. त्यावरून सारणी पूर्ण करा.**

कृती :

अ. क्र.	लांबी (l)	रुंदी (b)	उंची (h)	उभे पृष्ठफळ $= 2h\,[l + b]$	एकूण पृष्ठफळ $= 2\,[lb + bh + lh]$	घनफळ $= l \times b \times h$
1.	2.5 मी	2 मी	1.5 मी	....	....	....
2.	16 सेमी	8 सेमी	....	....	....	768 घसेमी
3.	....	6 सेमी	5 सेमी	....	240 चौसेमी	....

4) **एका पाण्याच्या टाकीची लांबी 5 मी., रुंदी 3 मी. आणि उंची 2 मी. आहे, तर त्या पाण्याच्या टाकीची धारकता लीटरमध्ये काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा. (1 घमी. = 1000 लीटर)**

कृती :

$l = 5$ मी. , $b = \square$, $h = \square$

$\therefore$ इष्टिकाचितीचे घनफळ $= l \times b \times h$

$= 5 \times \square \times \square = \square$ घमी

$\therefore$ पाण्याच्या टाकीची धारकता $= 30 \times \square$ लीटर $= \square$ लीटर

5) **एका शंक्वाकृती तंबूची उंची 8 मी आणि पायाचा व्यास 30 मी आहे, तर त्या तंबूसाठी किती मीटर कापड लागेल हे शोधण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा. (π = 3.14)**

कृती :

$h = 8$ मी.

$d = \square$ मी.

$\therefore\ r = \square$

$l^2 = \square + h^2$

$= \square + 8^2 = \square$

$\therefore\ l = \square$

शंक्वाकृती तंबूसाठी कापड = शंकूचे वक्रपृष्ठफळ

$= 3.14 \times 15 \times \square = \square$

$\therefore$ तंबूसाठी लागणारे कापड $= \square$ चौ.मी.

6) **256π चौसेमी पृष्ठफळ असणाऱ्या गोलाचे घनफळ किती हे शोधण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.**

कृती :

गोलाचे पृष्ठफळ = 256π चौसेमी (गोलाचे पृष्ठफळ = $4\pi r^2$ ....सूत्र)

$\therefore\ 4\pi r^2 = \square$

$\therefore\ r^2 = \square$

$\therefore\ r = \square$

आता गोलाचे घनफळ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \pi \times \square = \square\ \pi$

$\therefore$ गोलाचे घनफळ $= \square$ घसेमी

7) **एका धातूच्या भरीव अर्धगोलाचा व्यास 4.2 सेमी आहे. जर त्या धातूची घनता 5 ग्रॅम/घसेमी असल्यास त्या अर्धगोलाचे वस्तुमान किती?**

कृती :

d = 4.2 सेमी $\therefore$ r = [ ]

अर्धगोलाचे घनफळ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times$ [ ] = [ ]

$\therefore$ धातूच्या अर्धगोलाचे आकारमान = त्याचे घनफळ = [ ]

परंतु घनता $= \frac{\text{वस्तुमान}}{\text{आकारमान}}$

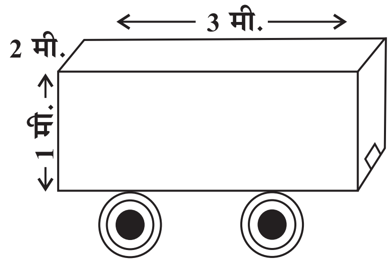
$\therefore$ वस्तुमान = घनता × [ ] = 5 × [ ]

$\therefore$ अर्धगोलाचे वस्तुमान = [ ] ग्रॅम

सरावासाठी उदाहरणे

1) एका गृहनिर्माण सोसायटीमधील 50 कुटुंबांमध्ये एकूण 700 व्यक्ती राहतात. त्यांना दररोज दरडोई 150 लीटर पाणी लागते. त्या सोसायटीची 20 मी. × 10 मी. × 3 मी. आकाराची पाण्याची टाकी आहे, तर त्या टाकीतील पाणी सोसायटीतील सर्व कुटुंबांना किती दिवस पुरेल?

2) एका ट्रॅक्टरच्या ट्रॉलीची लांबी 3 मी., रुंदी 2 मी. व उंची 1 मी. आहे. त्या ट्रॉलीमधून एका शेतकऱ्याने टोमॅटोची वाहतूक खोक्यांद्वारे (Crates) केली. एका क्रेटची लांबी 50 सेमी, रुंदी 30 सेमी व उंची 25 सेमी आहे, तर एका फेरीत त्या शेतकऱ्याला किती क्रेटची वाहतूक करता येईल?

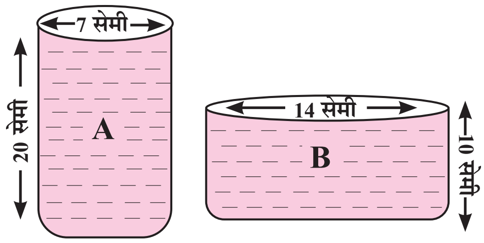


3) एका रोडरोलरची लांबी 1 मी व व्यास 70 सेमी आहे. पूर्ण रस्त्याचे एकदा सपाटीकरण करताना रोलरचे 750 फेरे होतात, तर त्या रस्त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

4) 10 मी लांब, 3 मी उंच आणि 15 सेमी रुंद भिंतींचे बांधकाम करण्यासाठी 25 सेमी × 15 सेमी × 8 सेमी आकाराच्या किती विटा लागतील?

5) एका जाहिरातीच्या गोलाकार फुग्यातून 44 घनफूट प्रति मिनिट या वेगाने हवेची गळती होत आहे. जर त्या फुगवलेल्या फुग्याची त्रिज्या 7 फूट असल्यास तो फुगा किती वेळेत पूर्णपणे रिकामा होईल? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

6) अजयला A या काचेच्या ग्लासातून आणि आयुषीला B या ग्लासातून सरबत दिले. ग्लासांचे आकार व मापे सोबतच्या आकृतीत दर्शविली आहेत. सरबत प्यायल्यानंतर आयुषी अजयला म्हणाली, 'मला तुझ्यापेक्षा जास्त सरबत मिळाले आहे.' आयुषीच्या विधानाचे गणितीय दृष्टीने समर्थन करा.



7) सुजल व सुजाता यांनी कार्डशीटपासून खालील मितीप्रमाणे प्रत्येकी एक खोका बनविला आहे.

सुजलने बनविलेल्या खोक्याची मिती ⟶ लांबी = 27 सेमी, रुंदी = 24 सेमी, उंची = 21 सेमी

सुजाताने बनविलेल्या खोक्याची मिती ⟶ प्रत्येक बाजू = 24 सेमी

दोघांपैकी कोणाचा खोका बनविण्यासाठी मोठे कार्डशीट लागेल?

तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.

8) एका अर्धवर्तुळाकार बोगद्याची लांबी 3 किमी व व्यास 1.4 मीटर आहे. प्रति घनमीटर ₹ 500 या दराने बोगदा खोदण्याचा खर्च काढा. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

9) एका रोडरोलरची त्रिज्या व उंची अनुक्रमे 0.5 मीटर व व्यास 1.4 मीटर आहे, तर त्या रोडरोलरच्या 50 फेऱ्यांत सपाट होणाऱ्या मैदानाचे क्षेत्रफळ काढा.

10) प्रत्येकी 729 घसेमी घनफळ असलेले दोन घन एकमेकांना जोडल्यामुळे तयार होणाऱ्या इष्टिकाचितीची लांबी काढा.

श्रेयनामावली

करूया मैत्री गणिताशी : कार्यपुस्तिका : इयत्ता – नववी

लेखन, निर्मिती व समीक्षण सहभाग

अ.क्र.	तज्ज्ञ सदस्यांचे नाव	पद	कार्यालय
१.	निलोफर पटेल	अधिव्याख्याता	जिल्हा शिक्षण व प्रशिक्षण संस्था, भंडारा.
२.	सुवर्णा देशपांडे	सहशिक्षक	न्यू इंग्लिश स्कूल, सातारा.
३.	रमाकांत सरोदे	सहशिक्षक	धर्मवीर संभाजी माध्यमिक विद्यालय, औरंगाबाद.
४.	सुहासिनी यादव	सहशिक्षक	कै. पी. एल. चौगुले हायस्कूल खोची, ता. हातकणंगले, जि. कोल्हापूर.
५.	अण्णाप्पा पारिट	सहशिक्षक	न्यू इंग्लिश स्कूल व ज्युनि. कॉलेज लाट, ता. शिरोळ, जि. कोल्हापूर.
६.	अतुल पटवा	सहशिक्षक	भाऊसाहेब फिरोदिया हायस्कूल, अहमदनगर.
७.	स्वाती देसाई	सहशिक्षक	अप्पासाहेब कल्याणी विद्यालय, सातारा.
८.	गणेश कोलते	सेवानिवृत्त शिक्षक	बुलढाणा.
९.	प्रमोद बेंद्रे	सहशिक्षक	रंगराव देशमुख माध्य. विद्यालय अंबवडे बु., ता., जि. सातारा.
१०.	सचिन बटवाल	माध्यमिक शिक्षक	गुरुनानक हायस्कूल आणि ज्युनि. कॉलेज, पुणे.
११.	शाहीन शेख	माध्यमिक शिक्षक	न्यू इंग्लिश स्कूल, वेळे कामथी, ता., जि. सातारा.
१२.	तरुबेन पोपट	सेवानिवृत्त मुख्याध्यापिका	पुणे.

शिक्षकांसाठी सूचना : १) विद्यार्थ्यांना स्वयं–अध्ययनाची सवय आणि अध्ययन निष्पत्तीनिहाय प्रगती करण्याची संधी मिळावी या हेतूने ही कार्यपुस्तिका तयार करण्यात आली आहे. २) पाठ्यपुस्तकातील आशय किंवा पाठ्यांश शिकल्यावर विद्यार्थ्यांनी नियमितपणे कार्यपुस्तिकेतील कृती पूर्ण कराव्यात ही अपेक्षा आहे. ३) कार्यपुस्तिकेतील प्रत्येक कृती विशिष्ट क्षमतेवर आधारित असून शिक्षकांनी अध्ययन प्रक्रियेच्या अंतिम टप्प्यावर भर न देता प्रत्येक विद्यार्थी अपेक्षित क्षमता प्राप्त करू शकेल याकडे लक्ष द्यावे. ४) शैक्षणिक वर्षात प्रत्येक विद्यार्थी कार्यपुस्तिकेतील कृती पूर्ण करेल यासाठी शिक्षकांनी स्थानिक परिस्थितीनुरूप नियोजन करावे. ५) कार्यपुस्तिकेत कृतिपत्रिकांचा समावेश असून विद्यार्थी कृतिपत्रिका स्व–प्रयत्नांनी आकलन करून सोडवतील याकरिता प्राधान्य द्यावे. ६) शिक्षकांनी विद्यार्थ्यांना गरजेनुसार वैयक्तिक अथवा गटात मदत करावी. ७) गणिती संकल्पना मुलांमध्ये संक्रमित करताना, स्थानिक परिसरातून त्या संकल्पना मुले शिकू शकतील, अशा संधी निर्माण करण्याचा प्रयत्न शिक्षकांनी करावा. तसेच अशा संधी शोधण्यास मुलांना प्रोत्साहन द्यावे किंवा प्रवृत्त करावे. ८) विद्यार्थ्यांचे मूल्यांकन करणे हा या कार्यपुस्तिकेचा एकमेव उद्देश नसून गणिताची भीती दूर करून गणिताचा आनंद घेण्यासाठी शिकविणे हा आहे. ९) प्रत्येक मूल गणित शिकू शकते हा विश्वास मनात बाळगून शिक्षकांनी प्रत्येक विद्यार्थ्याला या कार्यपुस्तिकेच्या मदतीने अध्ययन–अध्यापन प्रक्रियेत सहभागी करून घ्यावे.